Allgemeine Mechanik

Fabian Hassler

2024

Prof. Dr. Fabian Hassler
Institut für Quanteninformation
RWTH Aachen

Die Notizen stützen sich in wesentlichen Teilen auf die Vorlesungsskripte von Renato Renner, Matthias Gaberdiel, Gian Michele Graf und Walter Hunziker. Für das Bereitstellen des LaTeX Quelltextes möchte ich mich bei Renato Renner herzlich bedanken. Ein besonderer Dank gilt Alexander Voigt für das sorgfältige Korrekturlesen.

Tipp- und sonstige Fehler bitte F. Hassler mitteilen.

Dieses Werk steht unter der Lizenz CC BY-NC 4.0.

Inhaltsverzeichnis

1 Newtonsche Mechanik **1**

1.1 Grundlagen 1

1.2 Die newtonschen Bewegungsgleichungen 3

1.3 Das galileische Relativitätsprinzip 5

1.4 Erhaltungssätze 7

1.5 Beschleunigte Bezugssysteme 10

1.6 Mechanische Ähnlichkeit 13

2 Das Zweikörperproblem **17**

2.1 Der allgemeine Fall 17

2.2 Das Keplerproblem 23

3 Ausgewählte Dreikörperprobleme **31**

3.1 Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität 31

3.2 Bewegung des Mondes 35

4 Lagrange Mechanik **47**

4.1 Konfigurationsraum und Lagekoordinaten 47

4.2 Bewegungsgleichungen 53

4.3 Lagrangesche Systeme 54

4.4 Das hamiltonsche Prinzip 59

4.5 Erhaltungsgrößen und Satz von Noether 61

4.6 Die 10 klassischen Erhaltungssätze 68

4.7 Das Prinzip von Euler-Maupertuis 69

5 Schwingungsprobleme **75**

5.1 Konservative schwingende Systeme 75

5.2 Parametrische Resonanz 79

5.3 Schwingende Saite 83

6 Starre Körper **87**

6.1 Massenverteilung und Trägheitstensor 87

6.2 Bewegungsgleichungen 90

6.3 Der freie Kreisel 92

6.4 Der schwere symmetrische Kreisel 95

7 Hamiltonsche Systeme **101**

7.1 Hamiltonfunktion 101

7.2 Die kanonischen Bewegungsgleichungen 102

7.3 Phasenraum und Poissonklammern 103

7.4 Kanonische Transformationen 105

7.5 Kanonische Flüsse 107

7.6 Erhaltungsgrößen 109

7.7 Das hamiltonsche Prinzip im Phasenraum 111

8 Die Hamilton-Jacobi Theorie **115**

8.1 Der zeitunabhängige Fall 115

8.2 Separable Probleme 117

8.3 Winkel-Wirkungsvariablen 120

8.4 Zeitabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung 125

8.5 Ausblick auf die Wellenmechanik 127

9 Relativistische Mechanik **131**

9.1 Einsteinsches Relativitätsprinzip 131

9.2 Lorentztransformation 132

9.3 Relativistische Mechanik 139

Literatur

T. Fließbach,
Lehrbuch zur Theoretischen Physik I: Mechanik,
Spektrum Verlag Heidelberg, 6. Auflage (2009).

H. Goldstein,
Klassische Mechanik,
Aula Verlag Wiesbaden, 9. Auflage (1987).
Standardreferenz

F. Kuypers,
Klassische Mechanik,
Wiley-VCH Weinheim, 8. Auflage (2008).
viele Übungen mit Lösungen

L.D. Landau, E.M. Lifschitz,
Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band I: Mechanik,
Akademie Verlag Berlin, 11. Auflage (1976).
kurz und prägnant

N. Straumann,
Klassische Mechanik,
Springer-Verlag Berlin (1987) (online).
gutes Skript, eher mathematisch

V.I. Arnold,
Mathematische Methoden der klassischen Mechanik,
Birkhäuser Verlag Basel (1988).
eher mathematisch

M. Spivak,
Physics for Mathematicians, Mechanics I,
Publish or Perish Houston (2010).
mathematisch

Kapitel 1

Newtonsche Mechanik

Wir werden in diesem Kapitel die Grundzüge der newtonschen Mechanik einführen. Dem größten Teil davon sind Sie schon in der Experimentalphysik 1 begegnet. Wir werden die Grundlagen im Kapitel 1.1 nochmals kurz zusammenfassen. Wir werden anschließend das galileische Relativitätsprinzip, Erhaltungsgrößen und den Begriff der Scheinkräfte im Detail erläutern.

1.1 Grundlagen

Raum und Zeit: Nach Festlegung der Einheiten der Länge (Maßstäbe) und der Zeit (Uhren), sowie eines Bezugssystems charakterisieren wir *Ereignisse* durch $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{1+3}$, wobei t die Zeitkoordinate, und $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ kartesische Koordinaten eines drei-dimensionalen euklidischen Raumes sind. Eine absolute, vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung haben die Größen

- $|t_1 - t_2|$: Zeitabstand zweier beliebigen Ereignisse $(t_1, \boldsymbol{x}_1)$, $(t_2, \boldsymbol{x}_2)$
$$(\Longrightarrow \text{Gleichzeitigkeit ist absolut}); \tag{1.1}$$
- falls $t_1 = t_2$:
$$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|\text{: Raumabstand zweier gleichzeitigen Ereignisse.} \tag{1.2}$$

Die allgemeinen Koordinatentransformationen, welche die diese Größen invariant lassen, sind

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a\,, & &(\lambda = \pm 1; a \in \mathbb{R})\,, \\ \boldsymbol{x}' &= R(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)\,, & &(R(t) \in \mathrm{O}(3); \boldsymbol{b}(t) \in \mathbb{R}^3)\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Hier ist $R(t) \in \mathrm{O}(3)$ eine von t abhängige orthogonale 3×3 Matrix. Diese Transformationen erlauben es uns insbesondere: (i) die Zeitrichtung umzukehren ($\lambda = -1$),

(ii) den Zeitnullpunkt zu verschieben ($a \neq 0$) und (iii) das räumliche Bezugssystem (in zeitabhängiger Weise) zu rotieren und zu verschieben ($R(t), \boldsymbol{b}(t)$).

Man kann leicht nachprüfen, dass die Transformationen (1.3) eine Gruppe bilden. Das ist im Wesentlichen eine Folge davon, dass die Transformationen durch die Invarianten (1.1) und (1.2) charakterisiert sind.

Inertialsysteme: Vom Standpunkt der Mechanik sind jedoch nicht alle diese Koordinatensysteme äquivalent. Die besondere Klasse der *Inertialsysteme* ist durch das *Trägheitsgesetz* ausgezeichnet. In einem Inertialsystem erfüllt ein *freies Teilchen*[1] mit den Koordinaten $\boldsymbol{x}$ die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = 0\,, \qquad \left(\dot{f}(t) \equiv \frac{d}{dt} f(t)\right); \tag{1.4}$$

d. h. es bewegt sich geradlinig und gleichförmig auf der Bahn

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(0) + \dot{\boldsymbol{x}}(0)\, t\,. \tag{1.5}$$

In einem Inertialsystem ist also die Bahn eines freien Teilchens $t \mapsto (t, \boldsymbol{x}(t))$ eine Gerade im $\mathbb{R}^4$. Die Untergruppe der Koordinatentransformationen (1.3), welche Inertialsysteme in Inertialsysteme abbildet, sind dann die geradentreuen Abbildungen

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a\,, & &(\lambda = \pm 1; a \in \mathbb{R})\,, \\ \boldsymbol{x}' &= R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{b}\,, & &(R \in \mathrm{O}(3); \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3)\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Diese Abbildungen bilden wiederum eine Gruppe, die *Galileigruppe* oder Gruppe der *Galileitransformationen*.

Wir postulieren die Existenz eines Inertialsystems (und somit unendlich vieler, gleichförmig gegeneinander bewegter Inertialsysteme). In der Praxis werden unterschiedliche Bezugssysteme als Inertialsysteme verwendet. So kann man bei Labor-Experimenten auf kleinen Zeit- und Größenskalen approximativ die Erde als Inertialsystem annehmen. Andererseits ist bei der Betrachtung von Planetenbahnen in unserem Sonnensystem dessen Schwerpunkt mit nach Fixsternen orientierten Achsen (mit hoher Präzision) ein Inertialsystem. Auf noch größeren Zeit- und Längenskalen müsste man dann beispielsweise zum Schwerpunkt unserer Milchstraße übergehen.

Soweit nichts anderes gesagt wird, bezeichnen im Folgenden $(t, \boldsymbol{x})$ immer Koordinaten eines Ereignisses in einem (beliebigen) Inertialsystem.

Schwerpunktsatz (Konzept der Masse): Jedes Punktteilchen besitzt eine unveränderliche Masse $m > 0$, die (nach Festlegung einer Masseneinheit) durch den *Schwerpunktsatz* charakterisiert ist. Für ein abgeschlossenes (isoliertes) System von

[1] Ein freies Teilchen ist ein Teilchen, dass keiner (äußeren) Kraft ausgesetzt ist.

N Teilchen mit Koordinaten $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ gilt (der Schwerpunktsatz)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = 0\,. \tag{1.7}$$

Die Definition der Masse m_i ist von der Wahl des Inertialsystems unabhängig, da $\ddot{\boldsymbol{x}}_i' = R\ddot{\boldsymbol{x}}_i$.

Die Größe $\boldsymbol{p}_i = m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i$ nennt man den *Impuls* des i-ten Teilchens. Die obige Gleichung ist dann der Erhaltungssatz des Gesamtimpulses $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i$. Definieren wir den Schwerpunkt des N-Teilchen Systems durch

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{x}_i\,, \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i\,, \tag{1.8}$$

lässt der Schwerpunktsatz auch als $\ddot{\boldsymbol{X}} = 0$ schreiben. Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich daher auf einer Trägheitsbahn

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(0) + \frac{\boldsymbol{P}}{M} t\,. \tag{1.9}$$

Bei Streuprozessen können Teilchen erzeugt oder vernichtet werden. Jedoch muss der Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}$ in jedem Inertialsystem erhalten bleiben. Betrachten wir nun zwei Inertialsysteme, welche durch $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t$ miteinander verbunden sind: Der Impuls des i-ten Teilchens im gestrichenen Inertialsystem ist dann $\boldsymbol{p}_i' = \boldsymbol{p}_i + m_i \boldsymbol{v}$. Da sowohl $\boldsymbol{P}$ als auch $\boldsymbol{P}'$ konstant sind, folgt aus der Beziehung $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P} + M\boldsymbol{v}$, dass auch die Gesamtmasse M konstant sein muss. Insbesondere ist die Masse additiv, falls sich mehrere Teilchen zu einem einzigen verbinden.

1.2 Die newtonschen Bewegungsgleichungen

Wir betrachten ein System von N Teilchen, deren Ortskoordinaten durch $\boldsymbol{x}_i(t)$ beschrieben sind. Das newtonsche Prinzip der Determiniertheit verlangt, dass die Bahnen $\boldsymbol{x}_i(t)$ für alle t eindeutig festgelegt sind, falls die Orte $\boldsymbol{x}_i(t_0)$ und die Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{x}}_i(t_0)$ zu einem Zeitpunkt t_0 gegeben sind. Insbesondere sind dann die Beschleunigungen $\ddot{\boldsymbol{x}}_i(t_0)$ bestimmt, d. h. es gibt Funktionen $\boldsymbol{F}_i$, so dass

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \underbrace{\boldsymbol{F}_i\big(\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_N(t), \dot{\boldsymbol{x}}_1(t), \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N(t), t\big)}_{\text{Kraftgesetz des Systems}}\,. \tag{1.10}$$

Das sind die sogenannten *newtonschen Bewegungsgleichungen*. Umgekehrt folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen, dass (unter schwachen Voraussetzungen an $\boldsymbol{F}_i$) die Bahnen $\boldsymbol{x}_i(t)$ durch (1.10) und die obigen Anfangsdaten zu $t = t_0$ zumindest für ein kleines Zeitintervall um t_0 eindeutig

bestimmt sind. Wir nennen ein System von N Teilchen, welches einem Kraftgesetz der Form (1.10) genügt, ein *mechanisches System*.

In der Physik untersuchen wir normalerweise Kraftgesetze von der Form $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})} + \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{ex})}$ mit einer *äußeren Kraft* $\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{ex})} = \boldsymbol{F}^{(\mathrm{ex})}(\boldsymbol{x}_i, \dot{\boldsymbol{x}}_i, t)$ unabhänging von $\boldsymbol{x}_j, \dot{\boldsymbol{x}}_j$ mit $j \neq i$ und einer *inneren Kraft* $\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})}$. Die innere Kraft $\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})}$ auf das i-te Teilchen hängt dabei nur von den Positionen der Teilchen ab,

$$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})} = \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)\,. \tag{1.11}$$

Da sie nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, lässt sie sich statisch ausmessen. In den meisten Fällen ist $\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})}$ einfach eine Superposition von 2-Körperkräften

$$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \boldsymbol{F}_{ik}\,, \tag{1.12}$$

wobei $\boldsymbol{F}_{ik} = \boldsymbol{F}_{ik}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_k)$ die vom Teilchen k auf das Teilchen i wirkende Kraft ist. Für ein (abgeschlossenes) 2-Teilchensystem gilt dann wegen (1.7) einfach

$$\boldsymbol{F}_{ik} + \boldsymbol{F}_{ki} = 0 \tag{1.13}$$

(actio = reactio).

Beispiele abgeschlossener mechanischer Systeme (mit $\boldsymbol{F}^{(\mathrm{ex})} = 0$) sind das Sonnensystem, dessen Kraftgesetz durch

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = -G \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} m_i m_k \frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k|^3} \tag{1.14}$$

gegeben ist, oder ein System geladener Teilchen (mit Ladung e_i), für welches das Kraftgesetz

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} e_i e_k \frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k|^3} \tag{1.15}$$

gilt.

Beispiele nicht-abgeschlossener mechanischer Systeme sind ein geladenes Teilchen in einem externen elektromagnetischen Feld (gegeben durch $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$)

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)\,, \tag{1.16}$$

oder ein 1-dimensionaler Oszillator mit Reibungskraft und treibender Kraft $k(t)$

$$m\ddot{x} = -fx - r\dot{x} + k(t)\,. \tag{1.17}$$

In beiden Fällen ist das Teilchen nur einer äußeren Kraft ausgesetzt.

Die Beschreibung dieser Systeme als mechanische Systeme setzt Näherungen voraus. Zum Beispiel sind in (1.16) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$, und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ vorgegebene, äußere, elektromagnetische Felder, und der Einfluss des geladenen Teilchens auf sie wurde ignoriert. In (1.17) ist $-r\dot{x}$ eine summarische Beschreibung der Reibung, ohne Berücksichtigung der Dynamik des dämpfenden Mediums.

Da die Reibung eine effektive Beschreibung einer komplizierte Wechselwirkung eines Teilchens mit einem Medium beschreibt, werden wir diese in der vorliegenden Vorlesung so gut wie gar nicht betrachten. Sie werden feststellen, dass Reibung insgesamt in den Standardvorlesungen des Studiums eine untergeordnete Rolle einnimmt. So werden Sie (wahrscheinlich) erst wieder in der statistischen Mechanik mit Irreversibilität und Reibung in Berührung kommen.

1.3 Das galileische Relativitätsprinzip

Das galileische (oder klassische) Relativitätsprinzip besagt, dass *die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich sind*, d. h. sie sind invariant unter Galileitransformationen.[2] Das Prinzip macht daher alle Inertialsysteme gleichberechtigt. Für die Mechanik verlangt das Relativitätsprinzip, dass die Bewegungsgleichungen eines abgeschlossenen Systems invariant unter Galileitransformationen (1.6) sind. Wir wollen nun zeigen, dass dann $\boldsymbol{F}_{ik}$ von der Form

$$\boldsymbol{F}_{ik} = f_{ik}(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k|)\frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k|} \tag{1.18}$$

sein muss, wobei $f_{ik}(r)$ eine beliebige skalare Funktion einer Variablen ist.[3] Dies bedeutet, dass die Kraft entlang der Verbindungslinie der beiden Teilchen wirkt und in ihrer Stärke nur vom Abstand der beiden Teilchen abhängt.

Zum Beweis betrachten wir ein mechanisches 2-Teilchensystem, dessen Kraftgesetz in einem Inertialsystem von der Form

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{x}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \tag{1.19}$$

ist. Seien $\boldsymbol{x}'$ die Koordinaten in einem anderen Inertialsystem, das durch eine (zeitunabhängige) Galileitransformation mit $t = t'$ aus dem ungestrichenen Inertialsystem hervorgeht

$$\boldsymbol{x}_i'(t) = R\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{b}\,. \tag{1.20}$$

[2] Dieses fundamentale Prinzip wird später durch das einsteinsche Relativitätsprinzip der speziellen Relativitätstheorie ersetzt werden.

[3] Der Faktor $1/|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k|$ hätte natürlich auch in die Definition von f_{ik} absorbiert werden können. Wir möchten aber, dass f_{ik} die Einheiten einer Kraft hat.

Das Relativitätsprinzip verlangt dann, dass in dem gestrichenen Inertialsystem dieselbe Bewegungsgleichung gilt; d. h.

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{x}}_1' = \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2') \tag{1.21}$$

sollte äquivalent zu (1.19) sein mit $\boldsymbol{F}_{12}$ derselben Funktion. Für die linke Seite gilt $m_1 \ddot{\boldsymbol{x}}_1' = m_1 R \ddot{\boldsymbol{x}}_1$ aus (1.20).

Die Invarianz unter einer reinen Translation ($R = 1$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$) führt damit auf die Bedingung $\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{b})$. Diese impliziert sofort, dass $\boldsymbol{F}_{12}$ nur von $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ abhängen kann.[4] Somit erhalten wir, dass $\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$. Invarianz unter Rotationen $R \in \mathrm{SO}(3)$ führt dann auf die Bedingung, dass

$$R\, \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}_{12}(R\, \boldsymbol{x}) \tag{1.22}$$

gilt. Wählt man speziell eine Drehung R um die Achse in Richtung der Verbindungsgeraden $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ ($R\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$), so folgt mit $R\, \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x})$ die Behauptung

$$\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}) = f_{12}(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \tag{1.23}$$

über die Richtung der Kraft. Weiterhin verlangt (1.22), dass $f_{12}(\boldsymbol{x}) = f_{12}(R\boldsymbol{x})$ für jede Drehung R, also $f_{12}(\boldsymbol{x}) = f_{12}(|\boldsymbol{x}|)$. Damit ist die Behauptung (1.18) bewiesen.

Die Kräfte in (1.18) besitzen stets ein *Potential*

$$\boldsymbol{F}_{ik} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} V_{ik}(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k|)\,, \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dr} V_{ik}(r) = -f_{ik}(r)\,. \tag{1.24}$$

Dementsprechend gilt für die Superposition von 2-Körperkräften

$$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)\,, \qquad V = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{N} V_{ik}(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k|)\,. \tag{1.25}$$

Bis jetzt haben wir die „passive Interpretation“ des Relativitätsprinzips betrachtet: falls $\boldsymbol{x}(t)$ und $\boldsymbol{x}'(t')$ die *gleiche* Bahn in unterschiedlichen Inertialsystemen beschreiben, dann müssen sie in beiden Inertialsystemen die Bewegungsgleichungen erfüllen (welche die gleiche Form haben müssen). Man kann jedoch auch eine „aktive Interpretation“ benutzen: sei $\boldsymbol{x}(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung in einem Inertialsystem, dann ist $\boldsymbol{x}(t)$ auch eine Lösung bezüglich jedes anderen Inertialsystems.[5] Betrachten wir als Beispiel den Fall der Zeitumkehr ($\lambda = -1$): falls $\boldsymbol{x}(t)$ eine Lösung ist, dann ist auch $\boldsymbol{x}(-t)$ eine Lösung; die zeitumgekehrte Bewegung ist also immer auch eine Lösung der Bewegungsgleichungen.

[4] Man sieht dies z. B. indem man $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{x}_2$ setzt.

[5] Die Bahn $\boldsymbol{x}(t)$ beschreibt dann im Allgemeinen eine andere Bahn, da diese Funktion jetzt die Komponenten bezüglich eines anderen Koordinatensystems bezeichnet!

Invariant versus Forminvariant: *Forminvarianz* einer Gleichung verlangt, dass die Gleichung dieselbe Form in verschiedenen Bezugssystemen hat. Dabei muss das Potential $V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ ersetzt werden durch $V'(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N)$ definiert durch

$$V'(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N) = V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N), \tag{1.26}$$

da der Wert der potentiellen Energie einer Teilchenkonfiguration natürlich nicht von der Koordinatenwahl abhängt. Felder, welche sich wie (1.26) transformieren, nennt man *Skalarfelder*. Ausgehend vom Potential findet man mit der Kettenregel und (1.6) direkt den Zusammenhang

$$\boldsymbol{F}'_i(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N) = -\frac{\partial V'}{\partial \boldsymbol{x}'_i} = -R\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i} = R\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \tag{1.27}$$

der Kraftgesetze in den zwei Bezugssystemen. Felder, welche sich wie (1.27) transformieren, nennt man *Vektorfelder*. Schränkt man die möglichen Transformationen auf die Galileitransformationen (1.20) ein, erhält man, dass $\ddot{\boldsymbol{x}}' = R\ddot{\boldsymbol{x}}$, wie schon gezeigt. Damit sind die newtonschen Gleichungen (1.10) forminvariant unter Galileitransformationen, solange $\boldsymbol{F}$ ein Vektorfeld ist (beide Seiten sind im gestrichenen Bezugssystem einfach mit R multipliziert). Forminvarianz beschreibt damit einfach die mathematische Tatsache, dass eine Gleichung in bestimmten Bezugssystemen eine gewisse (schöne) Form aufweist.

Die *Invarianz* einer Gleichung unter Galileitransformationen verlangt hingegen, dass die Gleichung in zwei Bezugssystemen identisch ist. Im Falle der newtonschen Gleichung bedingt dies, dass $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N)$ oder auch $V'(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N) = V(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N)$, d. h. V' und V sind dieselbe Funktion. Wegen (1.26) gilt damit

$$V(R\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{b}, \ldots, R\boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{b}) = V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \tag{1.28}$$

für eine zeitunabhängige Galileitransformation $\boldsymbol{x}'_i = R\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{b}$. Die Invarianz eines abgeschlossenen Systemes in der klassischen Mechanik unter Galileitransformationen ist eine experimentelle Tatsache mit physikalischen Konsequenzen. Das Kraftgesetz hat damit die Form (1.18) und wir erhalten, wie im nächsten Kapitel ausführlich besprochen, die 10 klassischen Erhaltungsgrößen.

1.4 Erhaltungssätze

Wir wollen nun einige allgemeine Aussagen über mechanische Systeme machen. Mechanische Systeme sind dadurch charakterisiert, dass sie ein Kraftgesetz von der Form (1.10) erfüllen.

(a) Impulssatz: Es folgt direkt aus (1.10), dass

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i}_{\boldsymbol{P}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i}_{\boldsymbol{F}\text{: resultierende Kraft}} . \tag{1.29}$$

(b) Drehimpulssatz: Da die Zeitableitung von $\boldsymbol{x}_i$ proportional zu $\boldsymbol{p}_i$ ist, gilt weiterhin

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i}_{\boldsymbol{L}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{F}_i}_{\boldsymbol{M}\text{: resultierendes Drehmoment bzgl. } \boldsymbol{x}=0.} . \tag{1.30}$$

Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ lässt sich zerlegen, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{P}+\boldsymbol{L}_\mathrm{S}$, in den Anteil der Schwerpunktsbewegung $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{P}$ und einem Anteil der inneren Bewegung relativ zum Schwerpunkt

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X})\times(\boldsymbol{p}_i - m_i\dot{\boldsymbol{X}}) . \tag{1.31}$$

Bei der Zerlegung haben wir verwendet, dass

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i\times\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}\times\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{X}\times\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{X}} , \tag{1.32}$$

da $\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i = M\boldsymbol{X}$ und $M\dot{\boldsymbol{X}} = \mathbf{P}$.[6]

(c) Energiesatz: Multiplikation von (1.10) mit $\dot{\boldsymbol{x}}_i$ und Summation über i führt auf

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2}_{T} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\dot{\boldsymbol{x}}_i}_{\text{Leistung der Kräfte.}}, \tag{1.33}$$

wobei wir die *kinetische Energie* T eingeführt haben. Wie schon der Drehimpuls lässt sich auch die kinetische Energie zerlegen

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{X}}^2 + T_\mathrm{S} , \qquad \text{wobei} \qquad T_\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\big(\dot{\boldsymbol{x}}_i-\dot{\boldsymbol{X}}\big)^2 \tag{1.34}$$

die kinetische Energie der inneren Bewegung bezüglich des Schwerpunkts beschreibt. Bei der Zerlegung haben wir verwendet, dass

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i\dot{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{X}}^2. \tag{1.35}$$

[6] Hier bezeichnet M die Gesamtmasse, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

Abgeschlossene Systeme: Abgeschlossene Systeme, welche nur durch innere Kräfte miteinander wechselwirken, werden durch ein Potential $V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ mit $\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{in})} = -\partial_{\boldsymbol{x}_i} V$ beschrieben, vgl. Gl. (1.25). Die Invarianz der Bewegungsgleichungen unter Galileitransformationen (galileisches Relativitätsprinzip) verlangt, dass

$$V(R\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{b}, \ldots, R\boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{b}) = V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N), \qquad (R \in \mathrm{O}(3); \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3). \tag{1.36}$$

Damit gilt für abgeschlossene, galileiinvariante Systeme:

(i) die resultierende Kraft $\boldsymbol{F} = 0$ verschwindet ($\boldsymbol{P}$ ist erhalten),

(ii) das resultierende Drehmoment $\boldsymbol{M} = 0$ verschwindet ($\boldsymbol{L}$ ist erhalten),

(iii) die Leistung verringert das Potential,

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i = -\frac{dV}{dt} \tag{1.37}$$

(die Energie $T + V$ ist erhalten).

Um dies zu beweisen betrachten wir einen beliebigen Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$:

(i) Es gilt

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{F} = -\frac{d}{d\lambda} V(\boldsymbol{x}_1 + \lambda\boldsymbol{e}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + \lambda\boldsymbol{e})\Big|_{\lambda=0} = 0\,, \tag{1.38}$$

da das Potential unter Translationen invariant ist. Da dies für beliebige Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}$ gilt, folgt $\boldsymbol{F} = 0$.

(ii) Betrachten wir eine Drehung $R(\varphi)$ vom Winkel φ um $\boldsymbol{e}$. Dann gilt

$$\frac{d}{d\varphi} R(\varphi)\boldsymbol{x}\Big|_{\varphi=0} = \frac{d}{d\varphi}(\varphi\boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{x}\Big|_{\varphi=0} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{x}\,, \tag{1.39}$$

und daher

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{M} &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{x}_i) \cdot \boldsymbol{F}_i \\ &= -\frac{d}{d\varphi} V(R(\varphi)\boldsymbol{x}_1, \ldots, R(\varphi)\boldsymbol{x}_N)\Big|_{\varphi=0} = 0\,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Da $\boldsymbol{e}$ beliebig ist, folgt daraus $\boldsymbol{M} = 0$.

(iii) folgt direkt aus der Kettenregel.

Ein abgeschlossenes System, welches dem galileischem Relativitätsprinzip genügt, besitzt daher die zehn klassischen Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung):

$\boldsymbol{P}$ und $M\boldsymbol{X} - \boldsymbol{P}t$	(6 Schwerpunktsintegrale),	(1.41)
$\boldsymbol{L}$ (bzw. $\boldsymbol{L}_{\mathrm{S}}$)	(3 Drehimpulsintegrale),	(1.42)
$T + V$ (bzw. $T_{\mathrm{S}} + V$)	(Energieintegral).	(1.43)

Diese 10 Erhaltungsgrößen stehen in Beziehung zu den 10 kontinuierlichen Parametern $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$, R und a $(3+3+3+1)$ der Galileigruppe (siehe Kapitel 4.5.3).

1.5 Beschleunigte Bezugssysteme

Die newtonschen Bewegungsgleichungen haben die einfache Form

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}, \tag{1.44}$$

welche in allen Inertialsystemen gültig ist. Manchmal ist es jedoch bequem in Koordinatensystemen zu arbeiten, welche keine Inertialsysteme sind. In solchen beschleunigten Bezugssystemen treten dann sogenannte „Scheinkräfte“ auf.

Bezeichne $\boldsymbol{y}$ die Koordinaten eines beliebigen Bezugssystems, das durch

$$\boldsymbol{x} = R(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)\,, \qquad (R(t) \in \mathrm{SO}(3); \boldsymbol{b}(t) \in \mathbb{R}^3) \tag{1.45}$$

mit einem Inertialsystem $\boldsymbol{x}$ in Beziehung steht. Dann gilt

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{R}\,\boldsymbol{y} + R\,\dot{\boldsymbol{y}} + \dot{\boldsymbol{b}}\,, \qquad \ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot{R}\,\boldsymbol{y} + 2\dot{R}\,\dot{\boldsymbol{y}} + R\,\ddot{\boldsymbol{y}} + \ddot{\boldsymbol{b}}. \tag{1.46}$$

Multiplizieren der Gleichung für $\ddot{\boldsymbol{x}}$ mit R^t (R^t ist die transponierte Matrix zu R) führt auf

$$m\ddot{\boldsymbol{y}} = R^t\,\boldsymbol{F} - 2m\,R^t\dot{R}\,\dot{\boldsymbol{y}} - mR^t\,\ddot{R}\,\boldsymbol{y} - m\,R^t\,\ddot{\boldsymbol{b}}\,, \tag{1.47}$$

da $R^tR = 1$.

Der erste Term auf der rechten Seite ist der Kraftvektor

$$\boldsymbol{K} \equiv R^t\boldsymbol{F} \tag{1.48}$$

in y-Koordinaten. Die zusätzlichen Terme sind die auftretenden Scheinkräfte. Der letzte Term enthält die Beschleunigung des Punktes $\boldsymbol{y} = 0$ in y-Koordinaten

$$\boldsymbol{a} \equiv R^t\ddot{\boldsymbol{b}}. \tag{1.49}$$

Die restlichen Terme kann man vereinfachen, indem man die Abbildung $\Omega = R^t\,\dot{R}$ einführt. Man sieht leicht, dass die Abbildung Ω antisymmetrisch ist; denn Ableiten der Beziehung $R^t\,R = 1$ nach der Zeit führt auf

$$R^t\,\dot{R} + \dot{R}^t\,R = \Omega + \Omega^t = 0\,. \tag{1.50}$$

Somit hat Ω im Allgemeinen die Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}: \qquad \Omega\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{y}, \text{ mit } \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3). \tag{1.51}$$

Ein im $\boldsymbol{y}$-System ruhender Punkt hat im $\boldsymbol{x}$-System die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{R}\,\boldsymbol{y} + \dot{\boldsymbol{b}}$. Die Komponenten dieser Geschwindigkeit im $\boldsymbol{y}$-System sind daher $R^t\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y} + R^t\,\dot{\boldsymbol{b}}$. Insbesondere beschreibt $\boldsymbol{\omega}$ die $\boldsymbol{y}$-Komponenten der (instantanen) Winkelgeschwindigkeit des $\boldsymbol{y}$-Systems relativ zum $\boldsymbol{x}$-System; der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ zeigt hierbei in Richtung der instantanen Drehachse.

Weiter gilt

$$R^t\,\ddot{R} = \dot{\Omega} - \dot{R}^t\,\dot{R} = \dot{\Omega} - \dot{R}^t\,R\,R^t\,\dot{R} = \dot{\Omega} + \Omega^2\,, \tag{1.52}$$

$$R^t\,\ddot{R}\,\boldsymbol{y} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y})\,. \tag{1.53}$$

Insgesamt lautet (1.47) also

$$m\,\ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{K} - 2m\,(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{y}}) - m\,(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{y}) - m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y}) - m\boldsymbol{a}\,. \tag{1.54}$$

Die rechts neben $\boldsymbol{K}$ auftretenden Terme heißen Scheinkräfte, insbesondere ist

$$\begin{aligned} -2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{y}} \qquad & \textit{die Coriolis-Kraft} \\ \text{und}\ \ -m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y}) \qquad & \textit{die Zentrifugalkraft.} \end{aligned} \tag{1.55}$$

Das sind die einzigen Scheinkräfte bei gleichförmiger Rotation des $\boldsymbol{y}$-Systems ($\boldsymbol{\omega}$ = konstant, $\boldsymbol{a} = 0$). Der zusätzliche Term $-m\boldsymbol{a}$, der für $\boldsymbol{a} \neq 0$ auftritt, wird *Führungskraft* genannt.

Es sei darauf hingewiesen, dass die obigen Scheinkräfte proportional zur *trägen Masse* m_T des Teilchens sind, wohingegen die Gravitationskraft $m_S\,\boldsymbol{g}$ zur *schweren Masse* m_S proportional ist.[7] Experimentell findet man, dass die beiden gleich sind

$$m_S = m_T\,, \qquad \text{Experiment: } m_S/m_T = 1 \pm 10^{-12}. \tag{1.56}$$

Wegen der Gleichheit der schweren und der trägen Masse, lauten die Bewegungsgleichungen eines Teilchens in einem homogenen Schwerefeld $\boldsymbol{g}$ relativ zu einem frei fallenden, nicht rotierenden ($\boldsymbol{\omega} = 0$) Bezugssystem

$$m_T\ddot{\boldsymbol{y}} = m_S\boldsymbol{g} - m_T\boldsymbol{g} = 0\,, \tag{1.57}$$

d. h. die Gewichtskraft ist komplett wegtransformiert. In einem inhomogenen Schwerefeld trifft dies nur lokal zu. Die Äquivalenz der trägen und der schweren Masse ist eine wichtige Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

1.5.1 Bsp: Freier Fall auf die Erdoberfläche

Als Anwendung betrachten wir den freien Fall auf die Erdoberfläche. Sei P ein Punkt auf der Erdoberfläche, dessen geographische Breite durch φ beschrieben ist. Sei $(t, \boldsymbol{x})$

[7] Die träge Masse ist die Konstante, welche in den newtonschen Bewegungsgleichungen $\boldsymbol{F} = m_T\ddot{\boldsymbol{x}}$ auftritt. Die schwere Masse beschreibt die newtonsche Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}(Gm_{S1}m_{S2}/x_{12})$.

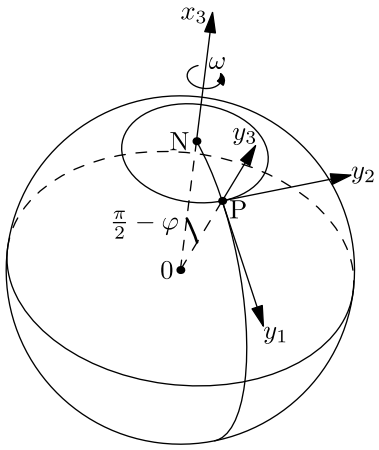


Abbildung 1.1: Der Punkt P liegt auf der geographischen Breite φ. Die Eigendrehung der Erde findet um die Achse Erdzentrum-Nordpol ($\overrightarrow{0N}$) statt. Das $\boldsymbol{y}$-System ist am Ort P fixiert und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $2\pi/\text{Tag}$ um die Erdachse.

ein „raumfestes“ Inertialsystem mit Ursprung im Erdmittelpunkt, dessen x_3-Achse in Richtung des Nordpols N zeigt. (Wir vernachlässigen hier die Bewegung der Erde um die Sonne, Polschwankungen, usw.) Das rotierende Koordinatensystem wird durch $\boldsymbol{y}$ bezeichnet mit $\boldsymbol{x} = R(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)$. Der Vektor $\boldsymbol{b}$ ist gleich $\boldsymbol{b} = R\boldsymbol{p}$, wobei $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{0P}$ der ortsfeste Vektor vom Erdmittelpunkt zu P (zur Zeit $t = 0$) ist, siehe Abbildung 1.1.

Mit (1.54) finden wir die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{g}' - 2\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{y}} \tag{1.58}$$

eines Massenpunkt in der Nähe von P, wobei

$$\boldsymbol{\omega} = (-\omega\cos\varphi, 0, \omega\sin\varphi)\,, \qquad \omega = 2\pi/\text{Tag}\,,$$

und

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}' &= \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{y}\big) \overbrace{-\,\boldsymbol{a}}^{=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p})} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{y})\big) \\ &\equiv (0, 0, -g)\,, \qquad (g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2). \end{aligned} \tag{1.59}$$

In der letzten Zeile haben wir die y_3-Richtung als vertikale Richtung definiert, entlang derer die Resultierende der Schwerebeschleunigung, der Zentrifugalkraft und der Führungskraft bei P wirkt.[8]

In Komponenten lautet Gleichung (1.58)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= 2\omega\sin(\varphi)\,\dot{y}_2\,, \\ \ddot{y}_2 &= -2\omega\sin(\varphi)\,\dot{y}_1 - 2\omega\cos(\varphi)\,\dot{y}_3\,, \\ \ddot{y}_3 &= -g + 2\omega\cos(\varphi)\,\dot{y}_2\,. \end{aligned} \tag{1.60}$$

[8]Die Schwerebeschleunigung ist annäherungsweise überall auf der Erde gleich groß. Wir haben ferner angenommen, dass $|\boldsymbol{y}| \ll |\boldsymbol{p}|$, so dass die Schwerebeschleunigung unabhängig von $\boldsymbol{y}$ ist.

Wir möchten einen Massenpunkt beschreiben, der bei $t = 0$ ruhend ($\dot{\boldsymbol{y}} = 0$) auf der Höhe h ($y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = h > 0$) losgelassen wird. Die erste und dritte Gleichung liefern dann

$$\dot{y}_1 = 2\omega \sin(\varphi) y_2 \qquad \text{und} \qquad \dot{y}_3 = -gt + 2\omega \cos(\varphi) y_2 \,. \tag{1.61}$$

Einsetzen in die zweite Gleichung führt auf die Differentialgleichung

$$\ddot{y}_2 + 4\omega^2 \, y_2 = 2gt\omega \cos\varphi \tag{1.62}$$

für y_2. Die allgemeine Lösung davon ist

$$y_2 = \frac{g \cos\varphi}{2\omega} t + A \sin(2\omega t) + B \cos(2\omega t) \,. \tag{1.63}$$

Die Anfangsbedingung $y_2(0) = 0$ liefert $B = 0$, und $\dot{y}_2(0) = 0$ verlangt $A = -(2\omega)^{-2} g \cos\varphi$. Wir finden somit das Resultat

$$y_2 = \frac{g \cos\varphi}{2\omega} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) . \tag{1.64}$$

Für $t > 0$ ist $y_2 > 0$, d. h. es findet eine *Ostablenkung* statt. Da $\omega t \simeq$ Fallzeit/Tag $\ll 1$ entwickeln wir nach Potenzen von ωt und erhalten

$$y_2 = \frac{gt^2}{3} \cos(\varphi) \omega t \,. \tag{1.65}$$

Im Prinzip, können wir mit Hilfe von (1.61) nun auch y_1, y_3 bestimmen. Die Korrekturen zum freien Fall sind für diese Komponenten aber nur von der Ordnung $(\omega t)^2$. Der Aufprall findet zur Zeit T mit $gT^2/2 = h$ statt. Wir erhalten die totale Ostablenkung

$$y_2(T) = \frac{1}{3} \omega \left(\frac{8h^3}{g} \right)^{1/2} \cos\varphi \,. \tag{1.66}$$

Zum Beispiel ist für $\varphi = 45°$, $h = 100\,\text{m}$ die Ostablenkung gerade mal $y_2 \approx 1{,}6\,\text{cm}$.

1.6 Mechanische Ähnlichkeit

Zum Teil ist es möglich, gewisse Eigenschaften der Lösung der newtonschen Bewegungsgleichungen (1.10) zu finden, ohne diese explizit zu lösen. Ein wichtiges Beispiel ist der Fall, wenn die Kräfte durch ein Potential V erzeugt werden, welches eine homogene Funktion (vom Grad k) der Koordinaten ist, d. h.

$$V(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N) = V(\lambda \boldsymbol{x}_1, \ldots, \lambda \boldsymbol{x}_N) = \lambda^k \, V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \tag{1.67}$$

mit $\lambda > 0$, $\boldsymbol{x}'_i = \lambda \boldsymbol{x}_i$ und $k \in \mathbb{R}$. Leitet man diese Beziehung nach $\boldsymbol{x}_i$ ab, erhält man

$$\lambda \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}'_i}(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_N) = \lambda^k \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N), \tag{1.68}$$

d. h. die Kräfte $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N) = -\partial_{\boldsymbol{x}_i} V$ sind homogen vom Grad $k-1$.

Gegeben eine Lösung $\boldsymbol{x}_i(t)$ der Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N) \tag{1.69}$$

kann man mit Hilfe der Transformation $\boldsymbol{x}_i' = \lambda \boldsymbol{x}_i$ und $t' = \beta t$ weitere (skalierte) Lösungen $\boldsymbol{x}_i'(t') = \lambda\, \boldsymbol{x}_i(t)$ erhalten solange

$$\beta = \lambda^{1-k/2} \tag{1.70}$$

gewählt wird. Mit dieser Wahl gilt nämlich

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{x}_i'}{dt'^2} = \frac{\lambda}{\beta^2} m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i \overset{(1.69)}{=} -\frac{\lambda}{\beta^2}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N) \overset{(1.68)}{=} -\underbrace{\frac{\lambda^{2-k}}{\beta^2}}_{=1}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i'}(\boldsymbol{x}_1',\ldots,\boldsymbol{x}_N')$$

und somit ist auch $\boldsymbol{x}_i'(t')$ eine Lösung von (1.69).

Der Wechsel von $\boldsymbol{x}_i(t)$ auf $\boldsymbol{x}_i'(t')$ entspricht dem Übergang zu neuen Teilchenbahnen, bei denen nur räumlichen und zeitlichen Abstände mit dem entsprechenden Faktor λ bzw. β skaliert wurden (geometrische Ähnlichkeit). Da die neuen Koordinaten wieder die Bewegungsgleichungen erfüllen, gilt für zwei Bahnen (welche zueinander ähnlich sind), dass das Verhältnis der Zeiten auf den Bahnen sich wie

$$\frac{t'}{t} = \beta = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2} \tag{1.71}$$

verhält, wobei l, l' die räumliche Ausdehnung der Bahnen beschreibt.[9] Wir erhalten zudem die Skalierungsrelationen

$$\frac{|\dot{\boldsymbol{x}}'|}{|\dot{\boldsymbol{x}}|} = \frac{\lambda}{\beta} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \quad \frac{|\boldsymbol{L}'|}{|\boldsymbol{L}|} = \frac{\lambda^2}{\beta} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2}, \quad \frac{E'}{E} = \frac{\lambda^2}{\beta^2} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \tag{1.72}$$

für die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{x}}$, den Drehimpuls $|\boldsymbol{L}|$, und die Gesamtenergie $E = T + V$.

Als ein Beispiel betrachten wir die gravitationelle Anziehung zweier Massepunkte ($k = -1$). Wir werden im Kapitel 2.2 zeigen, dass die dazugehörigen Bahnen Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt sind. Zwei ähnliche Bahnen haben dann dieselbe Exzentrizität aber im Allgemeinen eine verschiedene große Halbachse a. Aus (1.71) erhalten wir

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2}, \tag{1.73}$$

d. h. die Quadrate der Umlaufzeiten T verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachse (*3. Keplersches Gesetz*).

[9] Zum Beispiel könnte man $l = |\boldsymbol{x}_1(0)|$ und $l' = |\boldsymbol{x}_1'(0)|$ wählen.

Virialsatz: Für den Fall, dass das Potential eine homogene Funktion ist und die Bewegung der Teilchen in einem beschränkten Raumgebiet (mit beschränktem Impuls) verläuft, gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Zeitmittel der kinetischen und der potentiellen Energie. Der Satz ist von statistischer Natur, da er keine Aussage über instantane (exakte) Zusammenhänge verschiedener mechanischer Größen macht, sondern sich nur mit dem Zeitmittel befasst.

Um den Zusammenhang zu erhalten, schreiben wir die kinetische Energie ein wenig um,

$$2T = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{x}_i\right)}_{=G} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \cdot \underbrace{\dot{\boldsymbol{p}}_i}_{=\boldsymbol{F}_i}. \tag{1.74}$$

Wir möchten nun diesen Ausdruck über die Zeit mitteln. Das Zeitmittel einer Funktion $f(t)$ ist dabei definiert durch

$$\overline{f} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt\, f(t). \tag{1.75}$$

Es ist einfach zu sehen, dass für eine beschränkte Funktion $F(t)$

$$\overline{\frac{dF}{dt}} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0 \tag{1.76}$$

gilt. Nach Voraussetzung ist $G(t)$ beschränkt und aus (1.74) folgt der *Virialsatz*

$$2\overline{T} = -\overline{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{F}_i}; \tag{1.77}$$

die rechte Seite dieser Gleichung bezeichnet man als das *Virial* des Systems.

Für ein homogenes Potential gilt der *eulersche Satz*[10]

$$kV = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

und damit finden wir ($\boldsymbol{F}_i = -\partial_{\boldsymbol{x}_i} V$)

$$2\overline{T} = k\overline{V}. \tag{1.78}$$

Für das Gravitationspotential ($k = -1$) folgt damit $2\overline{T} = -\overline{V}$ (V ist negativ). Für einen isotropen Oszillator gilt $k = 2$ und daher $\overline{T} = \overline{V}$.

[10] Bew.: Ableiten von $V(\lambda x) = \lambda^k V(x)$ nach λ liefert $\sum_i \partial_{\boldsymbol{x}_i} V \cdot \boldsymbol{x}_i = k\lambda^{k-1} V$ (nach Kettenregel). Man setze dann $\lambda = 1$.

Kapitel 2

Das Zweikörperproblem

Bevor wir die Struktur der klassischen Mechanik weiter untersuchen wollen, ist es instruktiv, zunächst ein paar Beispiele zu studieren. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, einem isolierten mechanischen System von zwei Teilchen. Wir werden sehen, dass dieser Fall im Allgemeinen auf das Problem eines Teilchens in einem effektiven Potential reduziert werden kann. Diese Erkenntnis ist die Grundlage der allgemeinen Lösung (Integration) des Zweiteilchenproblems.

2.1 Der allgemeine Fall

Wie wir in Kapitel 1.3 gezeigt haben, wirkt die Kraft zwischen zwei Teilchen entlang der Verbindungslinie der beiden Teilchen und hängt in ihrer Stärke nur vom Abstand der beiden Teilchen ab. Die Bewegungsgleichungen sind daher im Allgemeinen von der Form

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_1}(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|)\,, \qquad \ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{1}{m_2}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_1}(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|)\,, \tag{2.1}$$

wobei $V(r)$ das Potential ist.

Für zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2, welche nur durch die Gravitationskraft miteinander wechselwirken, ist das Potential zum Beispiel gegeben durch $V(r) = -Gm_1m_2/r$. In diesem Fall gelten (2.1) auch für ausgedehnte, sphärisch symmetrische Körper (z. B. in guter Näherung für Himmelskörper), da außerhalb eines solchen Körpers die Gravitaionskraft genau so ist, als ob sich die gesamte Masse im Mittelpunkt befände (*newtonscher Satz*).

2.1.1 Relativkoordinaten und Erhaltungsgrößen

Um das obige Problem zu lösen, ist es hilfreich, die Schwerpunktsbewegung zu separieren. Dazu führen wir die Schwerpunkts- und die Relativkoordinaten

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{M}(m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2)\,, \qquad (M = m_1 + m_2)\,, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \tag{2.3}$$

ein. Bezüglich dieser Variablen lauten die Bewegungsgleichungen

$$M\ddot{\boldsymbol{X}} = 0 \tag{2.4}$$

$$\mu\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(|\boldsymbol{x}|)\,, \qquad \left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), \tag{2.5}$$

d. h. die Schwerpunktsbewegung $\boldsymbol{X}(t)$ und die Relativbewegung $\boldsymbol{x}(t)$ sind entkoppelt. Die Schwerpunktsbewegung $\boldsymbol{X}(t)$ ist eine Trägheitsbahn (siehe Kapitel 1.1), und die Gleichung für die Relativbewegung $\boldsymbol{x}(t)$ ist die *eines einzigen* Teilchens mit reduzierter Masse μ unter dem Einfluss des äußeren Potentials $V(|\boldsymbol{x}|)$. Das Relativsystem besitzt noch zwei Erhaltungsgrößen.

Drehimpuls: Der (relative) Drehimpuls

$$\boldsymbol{L} = \mu\,\boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}}\ (= \text{konstant}) \tag{2.6}$$

ist erhalten, da $\dot{\boldsymbol{L}} = -\boldsymbol{x} \times \partial_{\boldsymbol{x}} V(|\boldsymbol{x}|) = 0$. Somit liegt die Bahn $\boldsymbol{x}(t)$ in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{L}$, der *Bahnebene*. Um die Bewegung in der Bahnebene zu beschreiben, benutzen wir Polarkoordinaten (r, φ) mit den zugehörigen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ und $\boldsymbol{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ in radialer bzw. azimutaler Richtung.[1] Mit $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{e}_r$ und $\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$ finden wir für die Geschwindigkeit

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{2.7}$$

Damit ist der Betrag des Drehimpulses gegeben durch

$$l \;\equiv\; |\boldsymbol{L}| = \mu\, r^2\,\dot{\varphi} = \text{konstant}\,. \tag{2.8}$$

Dies ist der Flächensatz (*2. Keplersches Gesetz*): Wenn $F(t)$ die vom Vektor $\boldsymbol{x}(t)$ in der Bahnebene überstrichene Fläche bezeichnet, so ist

$$\dot{F}(t) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{l}{2\mu} = \text{konstant}\,, \tag{2.9}$$

siehe Abbildung 2.1.

Energie: Die andere Erhaltungsgröße ist die Relativenergie

$$T + V = \frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E = \text{konstant}\,. \tag{2.10}$$

[1] Wir haben das Koordinatensystem so gelegt, dass $\boldsymbol{L}$ entlang der (positiven) x_3-Achse zeigt.

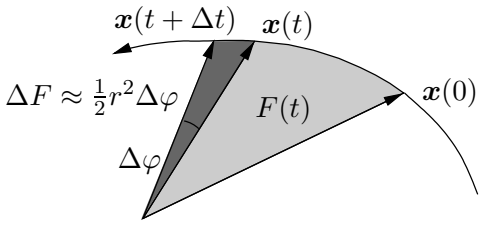


Abbildung 2.1: Illustration des Flächensatzes: $F(t)$ bezeichnet die Fläche in der Bahnebene, welche vom Vektor $\boldsymbol{x}(t)$ in der Zeit t überstrichen wird. Ihre Änderung ΔF ist durch die Fläche $r^2\Delta\varphi/2$ des dunkelgrauen Dreiecks gegeben. Wir erhalten daher für die Flächenänderung pro Zeit $\dot{F} = r^2\dot{\varphi}/2$, was proportional zum Drehimpuls $l = \mu r^2\dot{\varphi}$ ist.

Die Konstanz der Energie E folgt aus $\dot{E} = \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \mu\, \ddot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} V(|\boldsymbol{x}|) = 0$.

Die Kombination der beiden Erhaltungsgrößen erlaubt es uns das Zweikörperproblem zu lösen. Das Einsetzen von $\dot{\varphi}$ aus (2.8) in den Energiesatz (2.10) liefert

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) = E\,, \qquad U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\,. \tag{2.11}$$

Die Größe $l^2/2\mu r^2$ nennt man dabei *Zentrifugalpotential*. Die radiale Bewegung $r(t)$ auf $0 < r < \infty$ ist die eines Massenpunktes mit Masse μ unter dem Einfluss des effektiven Potentials $U(r)$.

Die verbleibende Differentialgleichung (2.11) ist separabel mit der Lösung

$$t(r) - t(r_0) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(x))}}\,; \tag{2.12}$$

die Wurzel wechselt dabei bei jedem Umkehrpunkt das Vorzeichen. Für den Bereich, in dem der Radius zunimmt (abnimmt), muss das positive (negative) Vorzeichen gewählt werden. Zudem erhält man mit

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \pm \frac{l}{\mu\, r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}}\,, \tag{2.13}$$

auch

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{l\, dx}{x^2 \sqrt{2\,\mu\,(E - U(x))}}\,. \tag{2.14}$$

Die Funktion $\varphi(r)$ beschreibt die Bahnkurve in der Ebene ohne Bezug auf den zeitlichen Ablauf. Um die Bahn $\boldsymbol{x}(t)$ zu finden, muss man (2.12) nach r auflösen. Damit erhält man $r(t)$ und mit Hilfe von (2.14) dann auch $\varphi(t)$.

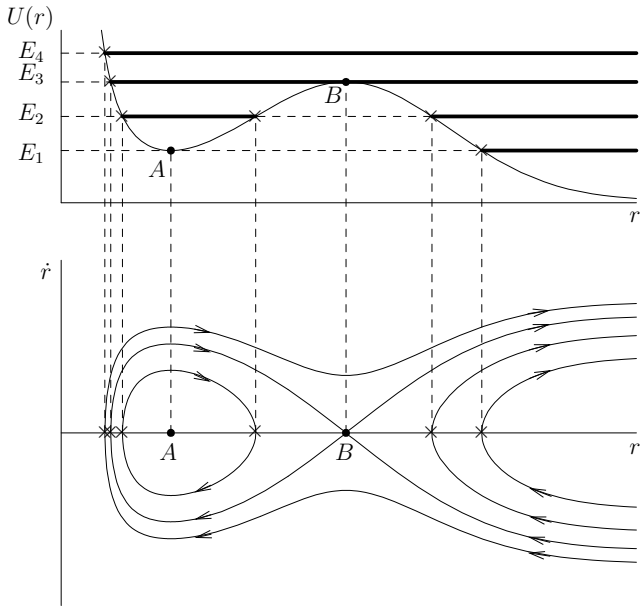


Abbildung 2.2: Potential und Phasenportrait für vier verschiedene Energien.

Durch (2.12) und (2.14) ist die Bestimmung der Bahn auf die Berechnung von Integralen reduziert: das Problem ist integrabel, siehe auch Kapitel 8.2. Die Bahn hängt von vier *Bewegungsintegralen* E, l, r_0 und $\varphi_0 = \varphi(r_0)$ ab. Zusammen mit der Bahnebene (Richtung von $\boldsymbol{L}$) legen diese die Bahn eindeutig fest.[2]

2.1.2 Die verschiedenen Bahntypen

Anhand eines Beispiels illustrieren wir mögliche Bewegungstypen der Relativbewegung. Die Abbildung 2.2 zeigt die Bewegung zu vier verschiedenen Energien im Phasenraum mit den Koordinaten $(r, \dot{r})$ (Phasenportrait). Die Bahnen verlaufen stets im Gebiet

$$E - U(r) = \frac{\mu}{2}\,\dot{r}^2 \geq 0\,. \tag{2.15}$$

An den Grenzen dieses Gebiets ist $\dot{r} = 0$; das sind die Umkehrpunkte der Bahn (im Diagramm mit $\times$ bezeichnet). Damit ein Punkt mit $\dot{r} = 0$ auch wirklich ein Umkehrpunkt ist, muss

$$\mu\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} \neq 0 \tag{2.16}$$

gelten. Falls $dU/dr = 0$ für $r = r_0$ (das sind die Punkte A und B im Diagramm) gibt es eine Gleichgewichtslösung mit $r = r_0$. Die Lösung bei A ist stabil (d. h. eine Bahn

[2] Den Zusammenhang zu den „elemenaren“ Integrationskonstanten $r_0, \varphi_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0$ erhält man durch die Gleichungen (2.8) und (2.10).

mit Anfangsbedingungen $(r, \dot{r})$ nahe bei A wird stets nahe bei A bleiben), wohingegen B instabil ist. Allgemein unterscheiden wir *gebundene Bahnen*, die ganz im Endlichen verlaufen, und *Streubahnen* mit $r(t) \to \infty$ für $t \to \pm\infty$.

2.1.3 Gebundene Bahnen

Für gebundene Bahnen ist $r(t)$ periodisch mit der Periode

$$T(E) = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(x))}}, \tag{2.17}$$

wobei $r_{\min}$ und $r_{\max}$ die Nullstellen von $E - U(r)$ sind, die das erlaubte r-Intervall begrenzen. Diese Formel folgt direkt aus (2.12).

Falls sowohl $r_{\min}$ als auch $r_{\max}$ Umkehrpunkte sind, gilt $T < \infty$. Denn in diesem Fall kann man lokal (nahe bei $x^* = r_{\min}$ und $x^* = r_{\max}$) die Funktion $E - U(x)$ entwickeln mit $E - U(x^* + \epsilon) \approx \alpha\, \epsilon$. Das resultierende Integral $\propto \int d\epsilon\, / \sqrt{\epsilon}$ konvergiert. Falls eine der Intervallgrenzen kein Umkehrpunkt sondern ein Gleichgewichtspunkt ist (so wie für $E = E_3$, wo $r_{\max} = r_{\mathrm{B}}$), dann gilt hingegen $T(E_3) = \infty$.

Für eine periodische Bahn nimmt das Azimut φ während einer Periode T um den Winkel (*Periheldrehung*)

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l\, dx}{x^2 \sqrt{2\mu(E - U(x))}}, \tag{2.18}$$

zu was direkt aus (2.14) folgt. Die Bahnkurve ist im Allgemeinen eine „Rosettenbahn“ im Ring $r_{\min} \le r \le r_{\max}$, die sich nur dann schließt, wenn $\Delta\varphi / 2\pi$ rational ist, siehe Abbildung 2.3(a).

2.1.4 Streubahnen

Wir betrachten nun den Fall, dass $V(r) \to 0$ für $r \to \infty$. Dann gibt es nur für Energien $E \ge 0$ Streubahnen (mit $r(t) \to \infty$ für $t \to \pm\infty$).[3] Falls $E > 0$ haben dabei die Streubahnen gerade Asymptoten (für $t \to \pm\infty$). Eine Streubahn ist bestimmt durch die Energie $E > 0$, die Richtung $\boldsymbol{e}$ ($|\boldsymbol{e}| = 1$) der einlaufenden Asymptote, sowie den Stoßparameter $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{e}$, siehe Abbildung 2.3(b). Für $t \to -\infty$ gilt (wegen $V \to 0$) die asymptotische Beziehung $\mu|\dot{\boldsymbol{x}}| \to \sqrt{2\mu E}$ und damit $\mu\dot{\boldsymbol{x}} \to \sqrt{2\mu E}\, \boldsymbol{e}$. Mit $l = \mu|\boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}}|$ erhalten wir die Beziehung

$$l = b\sqrt{2\mu E} \tag{2.19}$$

[3] Im Grenzfall $r \to \infty$ ist $V(r) - U(r) = 0$.

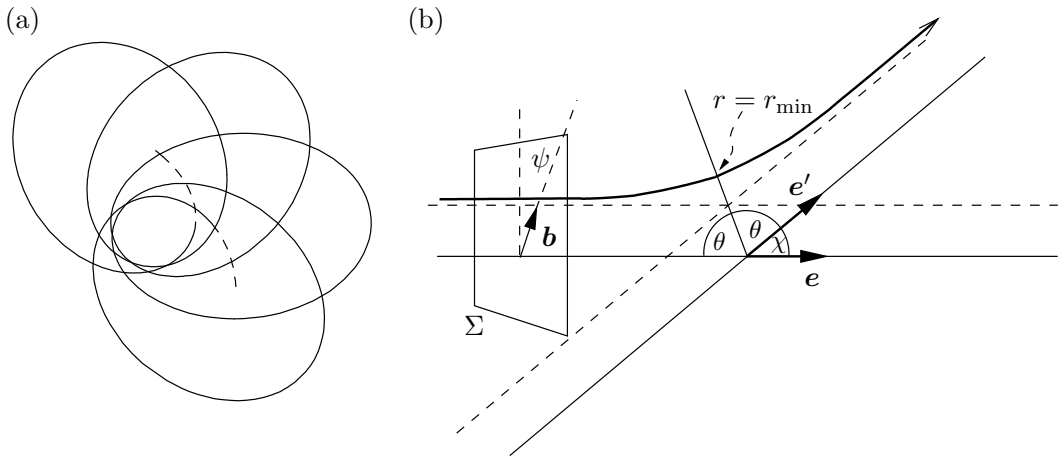


Abbildung 2.3: (a) Rosettenbahn (b) Streubahn mit dem Stoßparameter $\boldsymbol{b}$ in der Ebene Σ. Das Teilchen startet bei $t \to -\infty$ am Ort $r \to \infty$ und nähert sich dem Streuzentrum in Richtung $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{b}$. Es durchläuft dabei bei $r_{\min}$ den kleinsten Abstand zum Streuzentrum, bevor es sich für $t \to \infty$ in Richtung $\boldsymbol{e}'$ (abgelenkt durch den Streuwinkel χ) nach $r \to \infty$ bewegt.

zwischen dem Stoßparameter $b = |\boldsymbol{b}|$ und dem Drehimpuls l. Daher legen b und E den *Streuwinkel*

$$\chi = \pi - 2\theta \tag{2.20}$$

fest mit

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{l\,dx}{x^2\sqrt{2\mu(E - U(x))}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b\,dx}{x^2\sqrt{1 - V(x)E^{-1} - b^2x^{-2}}}\,, \tag{2.21}$$

vgl. mit Gleichung (2.14).

Bei festen E und $\boldsymbol{e}$ bestimmt $\boldsymbol{b}$ den Richtungsvektor $\boldsymbol{e}'$ ($|\boldsymbol{e}'| = 1$), der auslaufenden Asymptote. Dieser Zusammenhang definiert eine Abbildung $\Sigma \ni \boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{e}' \in S^2$. Da $\boldsymbol{e}'$ durch den Polarwinkel (χ, ψ) bezüglich $\boldsymbol{e}$ beschrieben ist, geht unter dieser Abbildung das Flächenelement $d\sigma = b\,db\,d\psi$ von Σ in das Raumwinkelelement $d\Omega = \sin\chi\,d\chi\,d\psi$ über. Der *differentielle Streuquerschnitt* (mit Dimension einer Fläche) ist definiert als das Verhältnis

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \left|\frac{b}{\sin\chi}\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{b}{\sin\chi}\left|\left(\frac{d\chi}{db}\right)^{-1}\right|\,, \tag{2.22}$$

wobei $\chi = \chi(b)$ durch (2.20) und (2.21) gegeben ist. Es kann vorkommen, dass verschiedene b_k zum gleichen Streuwinkel χ führen; dann muß (2.22) durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \sum_k \frac{b_k}{\sin\chi}\left|\left(\frac{d\chi}{db_k}\right)^{-1}\right| \tag{2.23}$$

ersetzt werden. Der letztere Fall tritt zum Beispiel immer auf, wenn $-\infty < V(0) \leq 0$ ist. Dann gilt nämlich $\chi(0) = 0$, denn für $b = 0$ verläuft die Bahnkurve gerade durch den Ursprung hindurch. Da im Allgemeinen auch $\lim_{b\to\infty} \chi(b) = 0$ gilt, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass jeder (nicht extremale) Wert $\chi(b_k)$ an mindestens zwei Stellen b_k angenommen wird.

In einem *Streuexperiment* beschießt man das Streuzentrum mit einer homogenen Stromdichte j (Teilchenzahl pro Flächen- und Zeiteinheit) einfallender Teilchen mit festen E und $\boldsymbol{e}$. Dann ist $j\,(d\sigma/d\Omega)\,d\Omega$ die Zahl der gestreuten Teilchen pro Zeiteinheit mit auslaufender Asymptotenrichtung $\boldsymbol{e}' \equiv (\chi, \psi)$ im Raumwinkelelement $d\Omega$.

Die totale Anzahl der gestreuten Teilchen $j\,\sigma_{\text{tot}}$ ist daher proportional zum *totalen Streuquerschnitt*

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{S^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \tag{2.24}$$

Er ist gleich der Fläche der Stoßparameter $\boldsymbol{b} \in \Sigma$, die zu einer Streuung führen (d. h. $\chi(b) \neq 0$ aufweisen); denn durch Integration von (2.24) erhalten wir sofort das Resultat

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi a^2\,, \tag{2.25}$$

wobei $a = \sup_{r\geq 0}\{r \mid V(r) \neq 0\} \leq \infty$ die Reichweite des Potentials ist.

2.2 Das Keplerproblem

Das Keplerproblem ist ein wichtiger Spezialfall des Zweikörperproblems, bei dem sich zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 gravitationell anziehen. In diesem Fall hat das Potential die Form

$$V(r) = -\frac{1}{r} G m_1 m_2\,, \tag{2.26}$$

wobei $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$ die newtonschen *Gravitationskonstante* bezeichnet. Mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,, \qquad m_1 m_2 = M\mu\,, \quad (M = m_1 + m_2) \tag{2.27}$$

findet man

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}. \tag{2.28}$$

Die Bahnkurve ist gegeben durch die allgemeine Beziehung (2.14). Substitution von $x = 1/s$ (mit $-dx/x^2 = ds$) führt auf

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \mp \int_{r_0^{-1}}^{r^{-1}} \frac{l\,ds}{\sqrt{2\mu(E - U(1/s))}} = \mp \int_{r_0^{-1}}^{r^{-1}} \frac{ds}{\sqrt{\alpha + 2\beta s - s^2}}\,, \tag{2.29}$$

wobei wir die Parameter $\alpha = 2\mu E l^{-2}$ und $\beta = GM\mu^2 l^{-2}$ eingeführt haben. Das letzte Integral hat die Stammfunktion ($\alpha + \beta^2 \geq 0$)

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\alpha + 2\beta s - s^2}} = -\arccos\Big(\frac{s-\beta}{\sqrt{\alpha+\beta^2}}\Big). \tag{2.30}$$

Somit lässt sich (2.29) explizit integrieren mit dem Resultat

$$\varphi(r) = \pm \arccos\Big(\frac{r^{-1}-\beta}{\sqrt{\alpha+\beta^2}}\Big); \tag{2.31}$$

hierbei haben wir die freie Konstante φ_0 gerade so gewählt, dass sie den Beitrag der unteren Integrationsgrenze weghebt. Durch Auflösung nach r ergibt sich die Bahnkurve in Polarkoordinaten

$$r = \frac{d}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,, \tag{2.32}$$

mit den Parametern

$$d = \frac{1}{\beta} = \frac{l^2}{GM\mu^2}\,, \text{ und} \tag{2.33}$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha+\beta^2}}{\beta}\,, \quad \text{d. h.} \quad 1-\varepsilon^2 = -\frac{\alpha}{\beta^2} = -\frac{2El^2}{G^2M^2\mu^3}\,. \tag{2.34}$$

Die Gleichung (2.32) für die Bahnkurve definiert einen Kegelschnitt mit Brennpunkt bei $r = 0$; und zwar je nach dem Wert der Exzentrizität ε eine(n)

Kreis	:	$\varepsilon = 0$,	d. h.	$E = -G^2M^2\mu^3/2l^2$,
Ellipse	:	$\varepsilon < 1$,	d. h.	$E < 0$,
Parabel	:	$\varepsilon = 1$,	d. h.	$E = 0$,
Hyperbel	:	$\varepsilon > 1$,	d. h.	$E > 0$.

Der Winkel $\varphi = 0$ entspricht dabei dem Perihel (r minimal). Wir wollen im Folgenden zeigen, dass (2.32) für $\varepsilon < 1$ gerade einer Ellipsen entspricht.

2.2.1 Ellipsenbahnen

Aus der Abbildung 2.4(a) und der Ellipsengleichung $r + \bar{r} = 2a$ ergibt sich die Beziehung

$$\bar{r}^2 = (r\cos\varphi + 2a\varepsilon)^2 + r^2\sin^2\varphi = (2a-r)^2. \tag{2.35}$$

Daraus erhalten wir nach Ausklammern das Resultat

$$4ar(1+\varepsilon\cos\varphi) = 4a^2(1-\varepsilon^2)\,. \tag{2.36}$$

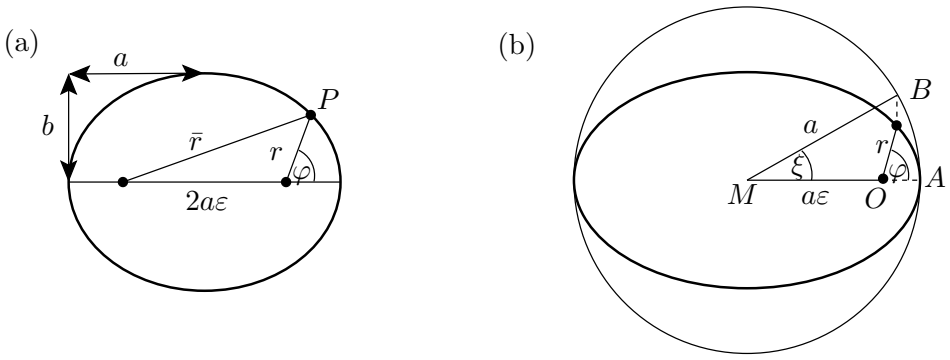


Abbildung 2.4: (a) Ellipse mit der großen und kleinen Halbachse a und b. Die beiden Brennpunkte haben den Abstand $2a\varepsilon$ mit der Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. (b) Graphischer Zusammenhang zwischen der wahren Anomalie (Azimut) φ und der exzentrischen Anomalie ξ. Für die Konstruktion der exzentrischen Anomalie benötigt man den Umreis vom Radius a. Der Punkt B auf dem Umkreis (und damit ξ) ist dadurch charakterisiert, dass er dieselbe Projektion auf die Achse MA hat wie der Punkt $P \equiv (r, \varphi)$ auf der Ellipse.

Dies ist gerade die Bahnkurve (2.32) mit

$$d = a(1 - \varepsilon^2). \tag{2.37}$$

Das das newtonsche Gravitationsgesetz mit $V(r) \propto r^{-1}$ Ellipsenbahnen vorhersagt ist historisch bedeutsam: Johannes Kepler hat aus den Beobachtungen von Tycho Brahe abgeleitet, dass die Bahn des Mars eine Ellipse mit Brennpunkt in der Sonne (bzw. im Schwerpunkt) ist, und dies auf die anderen Planeten erweitert (*1. Keplersches Gesetz*). Newton konnte dieses Resultat mit seiner Gravitationstheorie theoretisch erklären.

Ein weiteres wichtiges Merkmal einer Ellipse ist die kleine Halbachse

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{ad} \tag{2.38}$$

mit Hilfe derer die Ellipsenfläche $F = \pi ab = \pi d^{1/2} a^{3/2}$ bestimmt werden kann. Nach dem Flächensatz (2.9) (*2. Keplersches Gesetz*) gilt

$$F = T\dot{F} = \frac{Tl}{2\mu}, \tag{2.39}$$

wobei T die Umlaufdauer ist. Mit dieser Relation kann man nach der Umlaufzeit

$$T = \frac{2\mu}{l} F = \frac{2\mu}{l} \pi d^{1/2}\, a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} \tag{2.40}$$

auflösen. Falls $m_1 \ll m_2$ ist $M \approx m_2$, und das Verhältnis $T^2 : a^3$ ist für alle Planeten gleich (*3. Keplersches Gesetz*).

Zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs der Bahn ist es nützlich die *exzentrische Anomalie* ξ (d. h. den Winkel relativ zum Mittelpunkt der Ellipse, siehe Abbildung 2.4(b)) statt der wahren Anomalie (Azimut) φ zu benutzten.[4] Durch Betrachtung der Projektion von MB auf MA findet man die Beziehung

$$a\cos\xi = a\varepsilon + r\cos\varphi, \tag{2.41}$$

welche die exzentrische Anomalie ξ mit der wahren Anomalie φ verknüpft. Bezüglich der exzentrischen Anomalie gelten die *keplerschen Gleichungen*

$$r = a(1-\varepsilon\cos\xi), \qquad t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}(\xi - \varepsilon\sin\xi), \tag{2.42}$$

wobei $t = 0$ einem Periheldurchgang entspricht. Die Gleichungen (2.41) und (2.42) liefern zusammen eine (impliziten) Ausdruck der Bahn $\boldsymbol{x}(t)$.

Beweis der keplerschen Gleichungen: Die Gleichung für r folgt direkt aus (2.41) mit

$$\begin{aligned} \varepsilon a\cos\xi &= \varepsilon(a\varepsilon + r\cos\varphi) \\ &= a - a(1-\varepsilon^2) + \varepsilon r\cos\varphi \\ &= a - r(1+\varepsilon\cos\varphi) + \varepsilon r\cos\varphi \\ &= a - r\,, \end{aligned} \tag{2.43}$$

wobei in der zweiten Umformung die Bahnkurve (2.36) benutzt wurde.

Den Beweis der Zeitgleichung erhält man direkt aus dem Flächensatz $F(t) = l\,t/2\mu$, siehe Gl. (2.9). Dazu verwendet man, dass eine Streckung der Ellipse um dem Faktor $a/b = \sqrt{a/d} \geq 1$ in Richtung der kleinen Halbachse den Umkreis ergibt. Die vom Radiusvektor überstrichene Fläche $F(t)$ geht dabei über in die Fläche

$$\tilde{F}(t) = \frac{a}{b}F(t) = \sqrt{\frac{a}{d}}\,\frac{l\,t}{2\mu} = \frac{1}{2}\sqrt{GMa}\,t \tag{2.44}$$

von AOB (multipliziert mit a/b wegen der Streckung). Nun ist aber die Fläche $\tilde{F}$ von AOB gerade die Differenz des Kreissektors AMB mit der Fläche $a^2\xi/2$ und des Dreiecks OMB mit der Fläche $(a\varepsilon)(a\sin\xi)/2$. Somit erhalten wir

$$\tilde{F}(t) = \frac{1}{2}a^2(\xi - \varepsilon\sin\xi) \tag{2.45}$$

und durch Vergleich mit (2.44) die zweite Gleichung in (2.42).

[4] Die exzentrische Anomalie wurde schon von Kepler eingeführt.

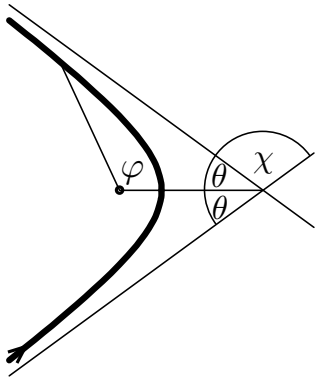


Abbildung 2.5: Streubahn (Hyperbel mit $\varepsilon > 1$) für das Keplerproblem.

2.2.2 Hyperbelbahnen

Wie schon am Anfang des Kapitels gezeigt, erhalten wir im Keplerproblem für positive Energien Streubahnen (Hyperbeln). Um den differenziellen Streuquerschnitt zu bestimmen, brauchen wir den Zusammenhang des Streuwinkels $\chi = \pi - 2\theta$ mit dem Stoßparameter $b = l/\sqrt{2\mu E}$.

Wie in Abbildung 2.5 ersichtlich, entspricht der Winkel θ dem Grenzwert $\theta = \pi - \lim_{r\to\infty} \varphi(r)$. Nach (2.32) gilt $\cos\varphi \to -1/\varepsilon$ für $r \to \infty$. Ausgedrückt durch den Winkel θ ist das die Bedingung $\cos\theta = 1/\varepsilon$ und daher $\tan^2\theta = \varepsilon^2 - 1$. Andererseits ist nach (2.34) aber auch

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2E\overbrace{(2\mu E b^2)}^{=l^2}}{G^2M^2\mu^3} \,. \tag{2.46}$$

Damit erhalten wir das Resultat

$$\tan\theta = \frac{2E}{GM\mu} b \,. \tag{2.47}$$

Zur Bestimmung des differenziellen Streuquerschnitts benötigen wir die Zwischenresultate

$$\frac{d\chi}{db} = -2\frac{d\theta}{db} = -\frac{4E}{GM\mu}\cos^2\theta \tag{2.48}$$

und

$$\frac{b}{\sin\chi} = \frac{b}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{GM\mu}{4E}\frac{1}{\cos^2\theta} \,. \tag{2.49}$$

Damit erhalten wir den Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{b}{\sin\chi}\left(\frac{d\chi}{db}\right)^{-1}\right| = \left(\frac{GM\mu}{4E\sin^2\frac{\chi}{2}}\right)^2 \,, \tag{2.50}$$

wobei wir $\cos\theta = \cos(\pi/2 - \chi/2) = \sin(\chi/2)$ verwendet haben. Für geladene Teilchen erscheint das Produkt der Ladungen $e_1 e_2$ anstelle von $GM\mu$ (*Streuformel von Rutherford*). Überraschenderweise gilt dasselbe Resultat auch in der Quantenmechanik.

2.2.3 Laplace–Runge–Lenz Vektor

Das Kepler-Problem weist gegenüber dem allgemeinen Zweikörper-Problem ein zusätzliches Bewegungsintegral auf, nämlich den Laplace–Runge–Lenz (LRL) Vektor

$$\boldsymbol{A} = \mu\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{L} - GM\mu^2 \frac{\boldsymbol{x}}{r}\,. \tag{2.51}$$

Diese Erhaltungsgröße erlaubt eine komplett algebraische Bestimmung der Bahn.

Um zu zeigen, dass $\boldsymbol{A}$ auch wirklich erhalten ist, bestimmen wir zuerst eine vektorielle Form des Flächensatzes

$$\begin{aligned}\mu\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{x}}{r} = \mu\Big(\frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{r} - \frac{\boldsymbol{x}}{r^2}\overbrace{\dot{r}}^{=\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}/r}\Big) &= \frac{\mu}{r^3}\big(\dot{\boldsymbol{x}}\, r^2 - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})\big)\\ = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{x}}) &= -\frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{L}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Damit erhalten wir direkt das Resultat

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = -\frac{GM\mu}{r^3}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{L} - \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{L}) = 0\,, \tag{2.53}$$

wobei wir die Bewegungsgleichungen

$$\mu\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(|\boldsymbol{x}|) = -\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}GM\mu \tag{2.54}$$

sowie die Zeitunabhängigkeit von $\boldsymbol{L}$ verwendet haben.

Der LRL-Vektor liefert nicht drei zusätzliche Erhaltsungsgrößen, da er mit dem Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ und er Energie E in Verbindung steht. Zum Einen liegt der LRL-Vektor in der Bahnebene, da er orthogonal zu $\boldsymbol{L}$ steht mit

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = 0, \tag{2.55}$$

wie man leicht durch explizites Nachrechnen findet.[5] Zum Anderen, ist das Quadrat seiner Länge verknüpft mit der Energie

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2 &= (GM\mu^2)^2 + \mu^2\dot{\boldsymbol{x}}^2\, l^2 - \frac{2GM\mu^2}{r}\overbrace{\mu\boldsymbol{x}\cdot(\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{L})}^{=l^2}\\ &= (GM\mu^2)^2 + 2\mu E l^2\,,\end{aligned} \tag{2.56}$$

[5] In der Tat stehen beide Terme in (2.51) einzeln senkrecht auf $\boldsymbol{L}$.

wobei wir die Formel (2.10) für E verwendet haben. Daher liefert der LRL-Vektor nur eine zusätzliche Erhaltungsgröße.

Um die Bedeutung dieser Erhaltungsgröße zu verstehen, messen wir das Azimut φ bezüglich $\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} = r|\boldsymbol{A}| \cos\varphi$ ($\boldsymbol{A}$ liegt ja in der Bahnebene). Andererseits können wir $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$ direkt aus (2.51) berechnen mit dem Resultat

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} = \mu(\boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}}) \cdot \boldsymbol{L} - GM\mu^2 r = l^2 - GM\mu^2 r\,. \tag{2.57}$$

Damit erhalten wir (rein algebraisch) die Bahnkurve

$$r = \frac{l^2}{GM\mu^2 + |\boldsymbol{A}| \cos\varphi} = \frac{d}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \tag{2.58}$$

mit d wie in (2.33) und der Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{|\boldsymbol{A}|}{GM\mu^2} \tag{2.59}$$

proportional zur Länge von $\boldsymbol{A}$. Die Richtung von $\boldsymbol{A}$ ist die zusätzliche Erhaltungsgröße. Da in der Parametrisierung (2.58) φ dem Perihel entspricht, zeigt der Vektor $\boldsymbol{A}$ vom Ursprung zum Perihel. Die Erhaltung von $\boldsymbol{A}$ entspricht daher der Abwesenheit einer Periheldrehung.

Aus der Erhaltung von $\boldsymbol{A}$ können wir zudem auf einfache Art die Bahnkurve von $\boldsymbol{p}(t) = \mu\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ bestimmen. Da $\boldsymbol{A}$ in der Bahnebene liegt, gilt $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{p} = 0$. Die Berechnung von

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{L} \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) - GM\mu^2\, \boldsymbol{L} \times \frac{\boldsymbol{x}}{r} \\ &= \big(l^2 \boldsymbol{p} - (\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{p})\boldsymbol{L}\big) - GM\mu^2\, \boldsymbol{L} \times \frac{\boldsymbol{x}}{r} \\ &= l^2 \boldsymbol{p} - GM\mu^2\, \boldsymbol{L} \times \frac{\boldsymbol{x}}{r} \end{aligned}$$

erlaubt es nach $\boldsymbol{p}$ aufzulösen mit dem Resultat

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{l^2}\, \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{A} + \frac{GM\mu^2}{l} \frac{\boldsymbol{L}}{l} \times \frac{\boldsymbol{x}}{r}. \tag{2.60}$$

Nun ist $(\boldsymbol{L}/l) \times (\boldsymbol{x}/r)$ einfach der Einheitsvektor in der Bahnebene, welcher senkrecht auf $\boldsymbol{x}$ steht (in Richtung des Umlaufs). Damit beschreibt $\boldsymbol{p}(t)$ im Laufe eines Umlaufs einen Kreis um $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{A}/l^2$ vom Radius $GM\mu^2/l$.

Kapitel 3

Ausgewählte Dreikörperprobleme

Im Gegensatz zum Zweikörperproblem, das wir im Kapitel 2 behandelt haben, ist das Dreikörperproblem nicht mehr integrabel. Man kann jedoch spezielle Lösungen (zum Teil näherungsweise) finden.

3.1 Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität

Sonne und Jupiter sind die schwersten Köper im Sonnensystem. Wir wollen die Bewegung eines leichten Objektes (Asteroid) in ihrem Einfluss untersuchen. Wir nehmen dafür an, dass sich Sonne S und Jupiter J auf Kreisbahnen mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/T_{\mathrm{J}}$ um den gemeinsamen Schwerpunkt 0 bewegen. Der Abstand $R = a_{\mathrm{J}}$ der beiden Körper bleibt dabei zeitlich konstant. Der Asteroid A wird über die Gravitationskraft von Sonne und Jupiter angezogen, soll aber selbst keinen Einfluss auf die Bewegung von S und J haben. Wegen dieser Näherung heißt diese Formulierung auch *restringiertes Dreikörperproblem*. Als Einheiten wählen wir

$$\omega = 1, \qquad R = 1, \qquad G = 1\ . \tag{3.1}$$

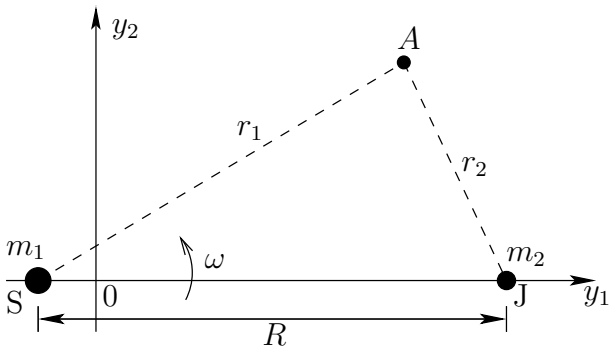


Abbildung 3.1: Bewegung eines Asteroiden A im Einfluss der Sonne und des Jupiters.

Damit legen wir die drei mechanischen Einheiten (Länge, Zeit, Masse) wie folgt fest:

$$\begin{aligned}
&\text{Länge:} && 1 \mathrel{\hat{=}} a_{\mathrm{J}} \approx 5{,}2\, a_{\mathrm{E}} = 7{,}8 \cdot 10^8\,\mathrm{km},\\
&\text{Zeit:} && 1 \mathrel{\hat{=}} \frac{T_{\mathrm{J}}}{2\pi} \approx 1{,}9\,\mathrm{Jahre},\\
&\text{Masse:} && 1 \mathrel{\hat{=}} \frac{4\pi^2 a_{\mathrm{J}}^3}{G T_{\mathrm{J}}^2} \overset{(2.40)}{\approx} 1{,}0 M_{\mathrm{S}} = 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}.
\end{aligned}$$

Da das in der Abbildung 3.1 definierte y-System rotiert, sind die Bewegungsgleichungen (1.54) für ein beschleunigtes Bezugsystem zu verwenden. Im Schwerpunktsystem hat J den Abstand $r_{\mathrm{J}} = Rm_1/(m_1+m_2)$ vom Ursprung, während der Abstand von S gerade $r_{\mathrm{S}} = Rm_2/(m_1+m_2)$ ist. Da sich S und J in einer Gleichgewichtslage befinden, heben sich bei deren Schwerpunkten $(-r_{\mathrm{S}}\boldsymbol{e}_1,\, r_{\mathrm{J}}\boldsymbol{e}_1)$ die Gravitationskraft und Zentrifugalkraft gerade auf; d. h. es gilt

$$\frac{G}{R^2} m_1 m_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} R\omega^2\,. \tag{3.2}$$

In den gewählten Einheiten erhalten wir die Beziehung[1]

$$m_1 + m_2 = 1\,, \tag{3.3}$$

und damit haben S, J die Koordinaten $(-m_2, 0, 0)$, $(m_1, 0, 0)$.

Da alle Kräfte auf A proportional zu seiner Masse m sind, fällt diese aus den Bewegungsgleichungen für A heraus. Wir können daher alle Kräfte durch Beschleunigungen messen. Mit diesen Vorüberlegungen haben wir folgende Beschleunigungen, welche auf den Körper A wirken, zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
&\text{Gravitationsbeschl.:} && \boldsymbol{G} = -\frac{m_1}{r_1^3}(y_1+m_2, y_2, y_3) - \frac{m_2}{r_2^3}(y_1-m_1, y_2, y_3),\\
&\text{Zentrifugalbeschl.:} && \boldsymbol{Z} = (y_1, y_2, 0),\\
&\text{Coriolisbeschleunigung:} && \boldsymbol{C} = 2(\dot{y}_2, -\dot{y}_1, 0).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Wir suchen nach Gleichgewichtslösungen mit $\boldsymbol{y}$ = konstant. Die Corioliskraft verschwindet in diesem Fall und wir erhalten die Bedingungen $(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{Z}=0)$

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - 1\Big) y_1 + m_1 m_2 \Big(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\Big) = 0\,,\\
&\Big(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - 1\Big) y_2 = 0\,, \qquad y_3 = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

[1] Das Resultat folgt auch direkt aus dem 3. Keplerschen Gesetz (2.40).

Für die Lösung der zweiten Gleichung gibt es 2 Möglichkeiten. Entweder ist $y_2 = 0$ (eulerscher Spezialfall) oder

$$\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} = 1 \qquad \text{(lagrangescher Spezialfall).} \tag{3.6}$$

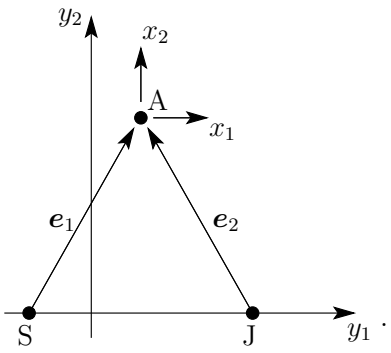
Im *eulerschen Fall* liegt A auf der y_1-Achse. Auf dieser Achse ist die resultierende Beschleunigung $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{Z}$ wie folgt gerichtet

Somit gibt es 3 Gleichgewichtslagen ($\times$ im Diagramm), die wir nicht weiter bestimmen wollen.

Im *lagrangeschen Fall* folgt aus (3.5) und (3.6)

$$r_1 = r_2 = 1\,, \tag{3.7}$$

d. h. SJA ist ein gleichseitiges Dreieck in der 12-Ebene;



Es gibt daher zwei lagrangesche Gleichgewichtslagen (mit $y_2 > 0$ oder $y_2 < 0$), deren Stabilität wir jetzt untersuchen wollen.

Für die Stabilitätsanalyse betrachten wir kleine Auslenkungen $\boldsymbol{x} \ll 1$ aus der Ruhelage $\boldsymbol{x} = 0$, d. h. wir setzen $\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{2} - m_2, \sqrt{3}/2, 0\right) + \boldsymbol{x}$ und linearisieren die Gravitationskraft $\boldsymbol{G}$; $\boldsymbol{Z}$ ist schon linear. Wegen $\partial_{\boldsymbol{y}} r_i^{-3}\big|_{\mathrm{A}} = -3\boldsymbol{e}_i$ mit

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3}, 0)\,, \qquad\qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}, 0) \tag{3.8}$$

ist in linearer Näherung

$$r_i^{-3} = 1 - 3\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{x}. \tag{3.9}$$

Damit erhalten wir die linearisierte Beschleunigung ($m_1 + m_2 = 1$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} &\approx -m_1(1-3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{x})\Big(\frac{1}{2}+x_1,\frac{\sqrt{3}}{2}+x_2,x_3\Big)\\ &\quad - m_2(1-3\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{x})\Big(-\frac{1}{2}+x_1,\frac{\sqrt{3}}{2}+x_2,x_3\Big)\\ &\approx \boldsymbol{G}^0+\frac{3}{2}m_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{x}\,(1,\sqrt{3},0)+\frac{3}{2}m_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{x}\,(-1,\sqrt{3},0)-(x_1,x_2,x_3)\\ &\equiv \boldsymbol{G}^0+(G_1,G_2,G_3)\,;\end{aligned} \tag{3.10}$$

dabei sind $\boldsymbol{G}^0 = (\frac{m_2-m_1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ die Terme nullter Ordnung und

$$\begin{aligned}G_1 &= \Big(\frac{3}{4}-1\Big)x_1+\frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)x_2\,,\\ G_2 &= \frac{3}{4}\sqrt{3}(m_1-m_2)x_1+\Big(\frac{9}{4}-1\Big)x_2\,,\\ G_3 &= -x_3\end{aligned} \tag{3.11}$$

sind die Korrekturen erster Ordnung in $\boldsymbol{x}$. Weiterhin ist

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}^0 + (x_1, x_2, 0)\,, \qquad \boldsymbol{C} = 2(\dot{x}_2, -\dot{x}_1, 0)\,, \tag{3.12}$$

wobei $\boldsymbol{Z}^0 = (\frac{1}{2} - m_2, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ wiederum den Beitrag nullter Ordnung darstellt. Nach Konstruktion gilt $\boldsymbol{G}^0 + \boldsymbol{Z}^0 = 0$ (Gleichgewichtslage), und wir erhalten die (linearisierten) Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \frac{3}{4}x_1+\frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)x_2+2\dot{x}_2,\\ \ddot{x}_2 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)x_1+\frac{9}{4}x_2-2\dot{x}_1,\\ \ddot{x}_3 &= -x_3\,.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Die x_3-Bewegung ist entkoppelt und führt eine harmonische Schwingung der Frequenz $\omega = 1$ aus (synchron mit der Kreisbewegung von S und J).

Zur Lösung der beiden verbleibenden Gleichungen machen wir den Exponentialansatz

$$x_k(t) = a_k\, e^{i\lambda t}\,, \qquad (k = 1, 2)\,. \tag{3.14}$$

Da die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung (3.13) reell sind, bilden der Real- und der Imaginärteil der komplexen Lösung (3.14) die gesuchten reellen Lösungen. Einsetzen des Ansatzes liefert das homogene Gleichungssystem

$$a_1\Big(\lambda^2+\frac{3}{4}\Big)+a_2\Big(\frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)+2i\lambda\Big)=0, \tag{3.15}$$

$$a_1\Big(\frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)-2i\lambda\Big)+a_2\Big(\lambda^2+\frac{9}{4}\Big)=0\,. \tag{3.16}$$

Damit das Gleichungssystem eine nichttrivale Lösung $(a_1, a_2) \neq 0$ besitzt, muss seine Determinante verschwinden, d. h.

$$\left(\lambda^2 + \frac{3}{4}\right)\left(\lambda^2 + \frac{9}{4}\right) = \frac{27}{16}(m_1 - m_2)^2 + 4\lambda^2\,. \tag{3.17}$$

Nach ein paar elementaren Umformungen unter Ausnutzung von $(m_1 - m_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2 = 1 - 4m_1m_2$ können wir diese Bedingung in die Form

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 27m_1m_2) \tag{3.18}$$

bringen.

Für $27m_1m_2 < 1$ oder in allgemeinen Masseeinheiten für

$$\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} < \frac{1}{27} \tag{3.19}$$

gibt es 4 verschiedene reelle Lösungen $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$ zu (3.18) und die allgemeine Lösung von (3.13) ist eine beliebige Superposition der 4 Eigenschwingungen (3.14). Da dann alle λ_i reell sind, verhalten sich diese Lösungen oszillatorisch und sind beschränkt. Zumindest in linearer Näherung ist die Gleichgewichtslage daher stabil, falls (3.19) erfüllt ist. Gilt die entgegengesetzte Ungleichung ($27m_1m_2 > 1$), so treten komplexe Eigenfrequenzen auf (darunter auch immer solche mit $\operatorname{Im}\lambda < 0$). Damit gibt es exponentiell wachsende Lösungen und die Gleichgewichtslage $\boldsymbol{x} = 0$ ist instabil.

Die Stabilitätsbedingung (3.19) lässt sich auf eine Bedingung für das Massenverhältnis $r = m_1/m_2$ umschreiben; $r > 1$, da o.B.d.A. $m_1 > m_2$. Einsetzen von $m_1 = r\,m_2$ liefert direkt die Bedingung $r/(1 + r)^2 < 1/27$. Durch Auflösen nach r erhalten wir das Resultat

$$r = \frac{m_1}{m_2} > \frac{1}{2}(25 + 3\sqrt{69}) \approx 25{,}0. \tag{3.20}$$

Im Fall von Sonne und Jupiter ist (3.20) sicher erfüllt ($m_\mathrm{J} \approx 10^{-3} m_\mathrm{S}$). Tatsächlich gibt es in der Gegend der lagrangeschen Gleichgewichtslagen zahlreiche Asteroiden, die sogenannten Trojaner.[2] In der lagrangeschen Gleichgewichtslage bezüglich Erde und Mond ist die Positionierung von Tracking and Data Relay Satelliten geplant.

3.2 Bewegung des Mondes

Der Mond M kreist um die Erde E in einer Bahnebene, die leicht schief zur Ekliptik E (Bahnebene der Erde um die Sonne S) steht. Wie in Abbildung 3.2 gezeigt, führen wir zusätzlich die Hilfsebene Σ ein. Damit können wir folgende Ereignisse für die Bewegung des Mondes unterscheiden:

[2] Ohne Beweis: Für genügend kleine Werte des Verhältnisses (3.19) gilt die Stabilität auch außerhalb der linearen Approximation. Die eulerschen Gleichgewichtslagen sind hingegen offensichtlich instabil.

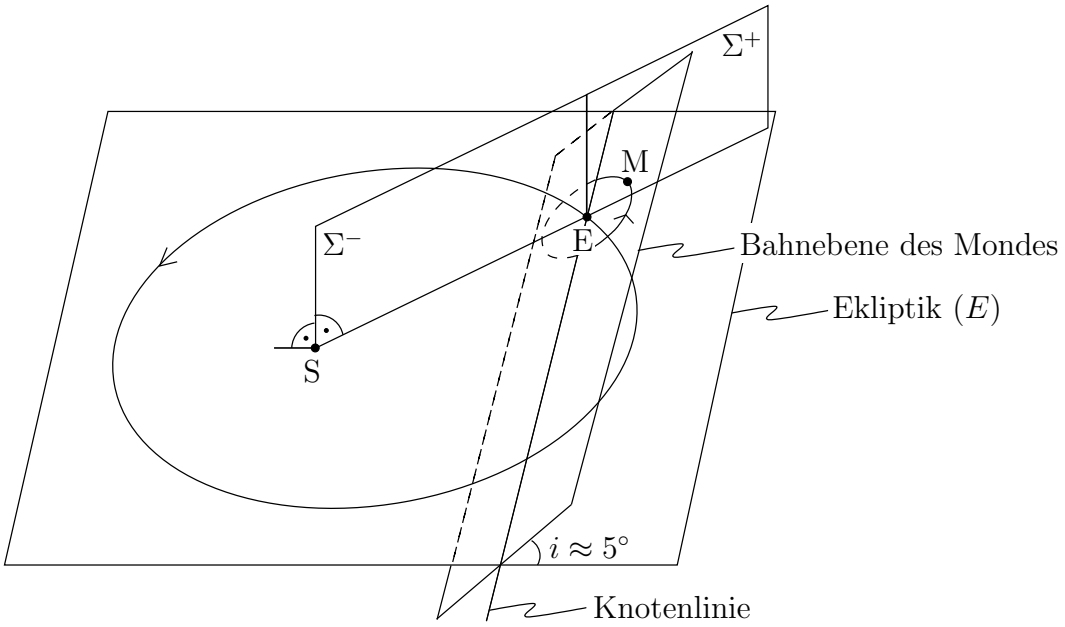


Abbildung 3.2: Bahn des Mondes relativ zu Erde und Sonne. Die Bahnebene des Mondes ist um $i \approx 5°$ gegenüber der Ekliptik geneigt. Wir definieren zusätzlich die (Hilfs-)Ebene Σ, welche senkrecht auf der Ekliptik steht und die Sonne mit der Erde verbindet. Wir unterteilen diese Ebene zusätzlich in zwei Bereiche: Die Punkte, welche zwischen der Erde und der Sonne liegen (Konjunktion), bezeichnen wir mit Σ^-, die Punkte, welche sich (von der Erde aus gesehen) in der entgegengesetzten Richtung zur Sonne befinden (Opposition), mit Σ^+.

$\mathrm{M} \in \Sigma^+$,	Vollmond (Mond steht in Opposition zur Sonne),
$\mathrm{M} \in \Sigma^-$,	Neumond (Mond steht in Konjunktion mit der Sonne),
$\mathrm{M} \in E \cap \Sigma^+$,	Mondfinsternis,
$\mathrm{M} \in E \cap \Sigma^-$,	Sonnenfinsternis.

Man kann nun auch zwei Perioden für den Umlauf des Mondes um die Erde unterscheiden:

$2\pi\mu$ = synodischer Monat
= Periode zwischen aufeinander folgenden, gleich gerichteten Durchgängen durch Σ (von Neumond zu Neumond)
= 29,53059 Tage;

$2\pi\tilde{\mu}$ = drakonitischer Monat
= Periode zwischen aufeinander folgenden, gleich gerichteten Durchgängen durch die Ekliptik (von aufsteigendem Knoten zu aufsteigendem Knoten)
= 27,21222 Tage.

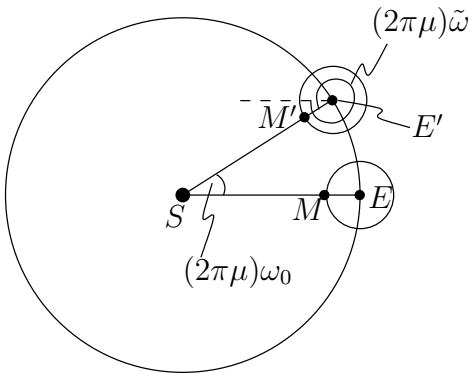


Abbildung 3.3: Projektion der Abbildung 3.2 auf die Ekliptik. Weil i sehr klein ist, ist die Bewegung des Mondes (fast) eine Kreisbahn.

Die beiden Perioden stehen im Verhältnis

$$r = \frac{\mu}{\tilde{\mu}} = 1{,}08520\,. \tag{3.21}$$

Das Verhältnis kann zum größten Teil rein kinematisch erklärt werden. Wenn wir die Mondbahn in die Ekliptik projizieren, erhalten wir näherungsweise (weil i klein ist) eine Kreisbahn. Vergleichen wir die Position nach einem synodischen Monat (nach der Zeit $2\pi\mu$), erhalten wir aus der Abbildung 3.3 die Beziehung

$$(2\pi\mu)\tilde{\omega} = 2\pi + (2\pi\mu)\omega_0 \tag{3.22}$$

mit $\tilde{\omega} = \tilde{\mu}^{-1}$ wobei der zusätzliche Term auf der rechten Seite auf Grund der Bewegung der Erde um die Sonne mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = J^{-1}$, $2\pi J = 1\,\text{Jahr} = 365{,}242\,\text{Tage}$ auftritt. Damit wäre

$$\frac{\mu}{\tilde{\mu}} = 1 + \frac{\mu}{J} = 1{,}08085 \approx 1 + \frac{1}{12{,}3}\,. \tag{3.23}$$

Die Abweichung von dem beobachteten Wert (3.21) lässt auf eine langsame Drehung der Bahnebene des Mondes schließen. Wir werden darauf später nochmals zurückkommen.

Man kann sich das kinematische Verhältnis in (3.23) auch einfach folgendermaßen erklären: Durch die Bewegung der Erde um die Sonne läuft die Ebene Σ dem Mond „davon“. Da sich die Ebene Σ in einem Jahr einmal dreht, erhalten wir, dass in dieser Zeit der Mond E einmal mehr als Σ durchlaufen hat, $N_E = N_\Sigma + 1$. Nach Definition haben wir $N_E = J/\tilde{\mu}$ und $N_\Sigma = J/\mu$ und daher

$$\frac{\mu}{\tilde{\mu}} = \frac{N_E}{N_\Sigma} = 1 + \frac{1}{N_\Sigma} = 1 + \frac{\mu}{J}. \tag{3.24}$$

3.2.1 Finsterniszyklen

Das Verhältnis (3.21) bestimmt die Kadenz der Sonnenfinsternisse (bzw. Mondfinsternisse): Ausgehend von einer exakten Konjunktion SME (Sonnenfinsternis), kann die nächste Sonnenfinsternis nur nach der Zeit

$$\Delta t = 2\pi\mu p \tag{3.25}$$

mit $p \in \mathbb{Z}$ wieder auftreten, da nur dann $M \in \Sigma^-$. Für eine Sonnenfinsternis muss der Mond nun aber zusätzlich in der Ekliptik stehen. Damit muß eine der Bedingungen

$$2\pi\mu p = 2\pi\tilde{\mu} q, \qquad \text{(im gleichen Knoten)}, \tag{3.26}$$

oder

$$2\pi\mu p = 2\pi\tilde{\mu}\left(q + \frac{1}{2}\right), \qquad \text{(im entgegengesetzten Knoten)}, \tag{3.27}$$

zusätzlich erfüllt sein. Somit reduziert sich die Bestimmung der Finsternisse auf das Auffinden rationaler Näherungen, so dass[3]

$$r = \frac{\mu}{\tilde{\mu}} \approx \frac{q(+\frac{1}{2})}{p}. \tag{3.28}$$

Wegen der Endlichen Ausdehnung von S, E und M müssen diese Bedingungen nur innerhalb einer „Toleranz“ $\Delta \approx \sin i = 0{,}087$ erfüllt sein,[4] d. h.

$$\operatorname{dist}\left(p\,r, \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \end{array} \right\}\right) < \Delta/2. \tag{3.29}$$

Wegen $r \approx 1 + 1/12$, siehe Gl. (3.23) tritt nach 12 synodischen Monaten (= ein Mondjahr) erneut eine Finsternis im gleichen Knoten auf. Diese Periodizität ist aber nicht exakt; bereits nach

$$\frac{\Delta}{|12r - 13|} \approx 3{,}88 \tag{3.30}$$

Zyklen, bzw. dem ganzen Teil davon, ist die Toleranz erschöpft und die Periodizität bricht ab.

Andererseits erhält man ausgehend von einer exakten Konjugation (Opposition) nach der Zeit $\Delta t = 2\pi\mu(p + 1/2)$ eine Opposition (Konjugation), falls

$$2\pi\mu\left(p + \frac{1}{2}\right) = 2\pi\tilde{\mu} q, \qquad \text{(im gleichen Knoten)}, \tag{3.31}$$

[3] Man erhält dasselbe Resultat für die Bestimmung einer weiteren Mondfinsternis, ausgehend von einer perfekten Opposition.

[4] Mehr Informationen finden Sie auf www.math.ualberta.ca/pi/issue6/page17-18.pdf.

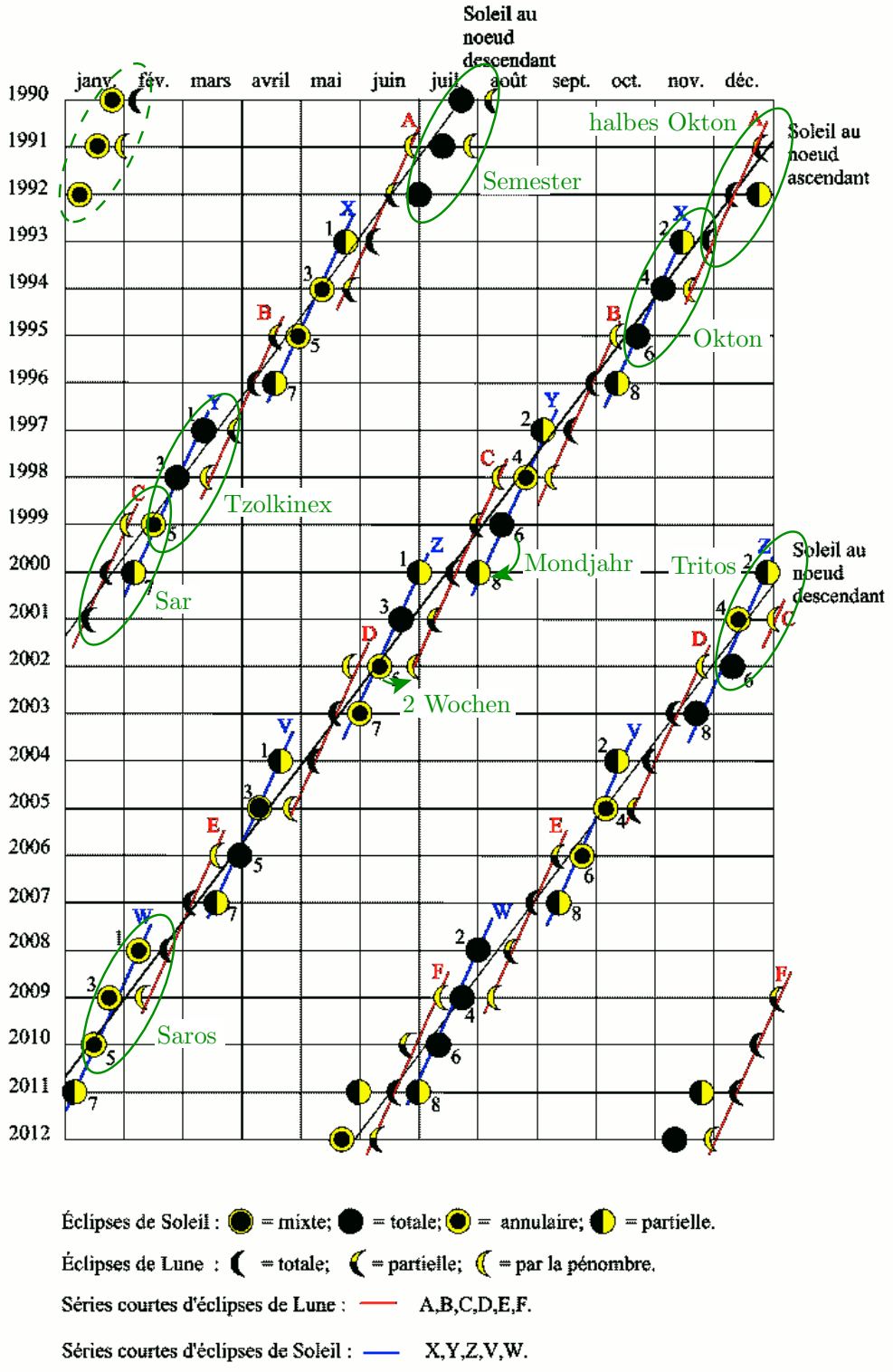


Abbildung 3.4: Kanon der Finsternisse, adaptiert von www.imcce.fr (Patrick Rocher); ausgehend von der Situation oben links (grün gestrichelt) mit drei Sonnen- und zwei Mondfinsternissen, erhält man dieselbe Konfiguration (bis auf einen kleinen Fehler) nach gewissen Zeiten (grün umrandet).

oder

$$2\pi\mu\left(p+\frac{1}{2}\right)=2\pi\tilde{\mu}\left(q+\frac{1}{2}\right),\qquad\text{(im entgegengesetzten Knoten).}\tag{3.32}$$

Damit brauchen wir in diesem Fall eine rationale Näherung

$$r=\frac{\mu}{\tilde{\mu}}\approx\frac{q(+1)}{2p+1}\tag{3.33}$$

mit ungeradem Nenner.

Man erhält gute rationale Näherungen der (irrationalen) Zahl $2r$ mit der Methode der Kettenbrüche.[5] Wir erhalten unter anderem die Näherungen

$$2r=2,\frac{11}{5},\frac{13}{6},\frac{102}{47},\frac{191}{88},\frac{293}{135},\frac{484}{223}.\tag{3.34}$$

Mit (3.28) erhalten wir die folgenden Finsterniszyklen (von Sonnenfinsternis zu Sonnenfinsternis, oder von Mondfinsternis zu Mondfinsternis):

q:	p:	Name:	Δt/Jahr	q:	p:	Name:	Δt/Jahr
Mond im gleichen Knoten:				*Mond im entgegenges. Knoten:*			
13	12	Mondjahr	0,970	6	6	Semester	0,485
51	47	Okton	3,800	95	88	Tzolkinex	7,115
242	223	Saros	18,030	146	135	Tritos	10,915

Zudem erhalten wir mit (3.28) für den Wechsel von einer Sonnenfinsternis zu einer Mondfinsternis (oder umgekehrt), die Zyklen[6]

q:	p:	Name:	Δt/Jahr	q:	p:	Name:	Δt/Jahr
Mond im gleichen Knoten:				*Mond im entgegenges. Knoten:*			
121	111	Sar (halber Saros)	9,015	0	0	2 Wochen	0,040
				25	23	halber Okton	1,900

In Abbildung 3.4 haben wir die verschiedenen Zyklen dargestellt. Der berühmteste Zyklus ist der *Saros*(zyklus) ($223r=241{,}999\approx 242$) mit der Periode[7]

$$\Delta t=(2\pi\mu)223\equiv 1\ \textbf{Saros}\approx 18\,\text{Jahre}+11\,\text{Tage}+8\,\text{Stunden},\tag{3.35}$$

[5] Wir behandeln $2r$, da der Nenner in (3.28) im Allgemeinen halbzahlig ist. Die Kettenbruchentwicklung von $2r$ ist gegeben durch $[2;5,1,6,1,1,1,1]$. Das entspricht den Konvergenten $2r=2,(11/5),13/6,(89/41),102/47,191/88,293/135,484/223$, siehe de.wikipedia.org/wiki/Kettenbruch.

[6] Nur Näherungen $r\approx q/p$ mit p ungerade liefern einen Eintrag.

[7] In dieser Formel (und nur hier) bezieht sich 18 Jahre auf die Zeit von $(18\cdot 365+4)$ Tagen. Die 4 zusätzlichen Tage entsprechen der (minimalen) Anzahl Schaltjahre in den 18 Jahren.

die schon den Chaldäern bekannt war. Der Zyklus dauert über 1200 Jahre (über 70 Finsternisse) an, bevor er abbricht. Die totale Sonnenfinsternis vom 11. August 1999 war in Mitteleuropa sichtbar und hat sich daher am 21. August 2017 um etwa 8 Stunden verschoben (d. h. über den USA) wiederholt.[8] Wegen der Zeitverschiebung findet die nächste Sonnenfinsternis in Europa (dieselben Saroszyklus) erst wieder nach 3 Saros = 1 *Exeligmos* am 12. September 2053 statt. Diese Finsternis wird Gibraltar nur streifen und ansonsten nur in Nordafrika sichtbar sein.

3.2.2 Restringiertes Dreikörperproblem

Wir wollen nun das für die Bestimmung der Finsternisse wichtige Verhältnis (3.21) möglichst genau theoretisch als Funktion von μ/J bestimmen. Dazu behandeln wir das System S, E, M (mit Massen $M \gg m \gg m'$) als restringiertes Dreikörperproblem, siehe Kap. 3.1; d. h. wir betrachten den Mond als Körper im externen Gravitationsfeld von Sonne und Erde. Die Erde beschreibt eine Kreisbahn (Radius R) um die Sonne. Umgekehrt beschreibt die Sonne eine Kreisbahn im rotierenden Bezugssystem der Erde mit Ursprung E. Wir wählen die Einheiten[9]

$$\omega = J = 1, \qquad m = 1, \qquad G = 1. \tag{3.36}$$

Damit wird der synodischer Monat

$$\mu \approx \frac{29{,}53\,\text{Tage}}{1\,\text{Jahr}} = 0{,}08085\,. \tag{3.37}$$

Im 2-Körpersystem Sonne-Erde müssen sich wie in (3.2) Gravitations- und Zentrifugalkraft aufheben,

$$G\frac{mM}{R^2} = \frac{mM}{M+m} R\omega^2 \approx mR\omega^2. \tag{3.38}$$

Wir erhalten in unseren Einheiten daher die Beziehung

$$M = R^3. \tag{3.39}$$

Wir wählen das beschleunigte Koordinatensystem $\boldsymbol{y}$, wie in Abbildung 3.5 gezeigt. Auf den Mond wirken folgende Beschleunigungen (Kräfte nach Division durch m'). Die *Gravitationsbeschleunigungen* von Erde

$$\boldsymbol{G}_E = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|} = -\frac{1}{|\boldsymbol{y}|^3}\boldsymbol{y}\,, \tag{3.40}$$

[8] Die entsprechenden Ereignisse werden katalogisiert als Sonnenfinsternis Nr. 21 und 22 im 145. Saroszyklus. Die Diskrepanz $11 + 11 = 22 \neq 21$ beim Datum kommt daher, dass es in den 18 Jahren 5 Schaltjahre (2000, 2004, 2008, 2012, 2016) gibt.

[9] Damit sind die drei mechanischen Einheiten gegeben durch $2{,}2 \cdot 10^6$ km, 58 Tage und $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

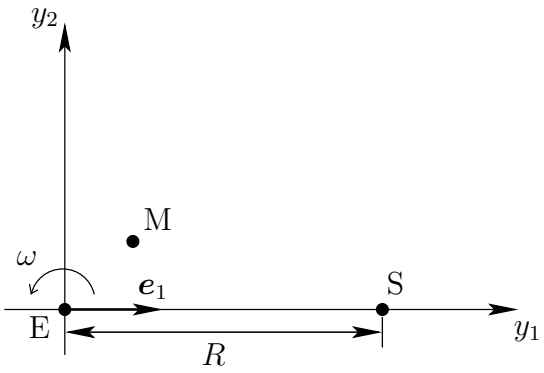


Abbildung 3.5: Beschleunigtes Koordinatensystem für das restringierte Dreikörperproblem Sonne (S), Erde (E), Mond (M). Das System rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = J^{-1}$ um E.

und Sonne

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_S &= M\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\,\frac{1}{|R\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{y}|}\\ &= M\Big(\frac{\boldsymbol{e}_1}{R^2} + \frac{3(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{y}}{R^3} + O(y^2)\Big)\\ &= R\,\boldsymbol{e}_1 + 3\,y_1\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{y} + \dots\,. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Die Linearisierung in $\boldsymbol{y}/R$ ist angebracht, da für die Mondbahn $|\boldsymbol{y}|/R \approx 1/390$ gilt. Der erste Term kompensiert natürlich genau die *Führungsbeschleunigung*[10] (siehe (1.54))

$$-\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times(-R\boldsymbol{e}_1)) = -R\,\boldsymbol{e}_1\,. \tag{3.42}$$

Weiterhin wirkt die *Zentrifugalbeschleunigung*

$$\boldsymbol{Z} = (y_1, y_2, 0), \tag{3.43}$$

welche die $1,2$-Komponenten von $-\boldsymbol{y}$ in (3.41) kompensiert. Schließlich ist die *Coriolisbeschleunigung* gegeben durch

$$\boldsymbol{C} = 2(\dot{y}_2, -\dot{y}_1, 0)\,. \tag{3.44}$$

[10]Der Koordinatenursprung, der in der Erde liegt, wird mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Sonne bewegt.

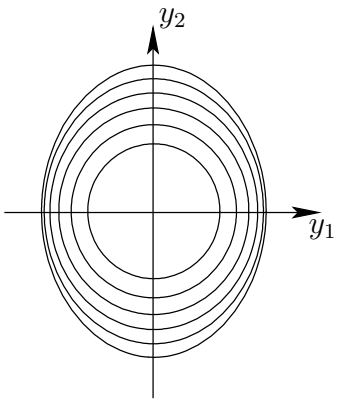


Abbildung 3.6: Schar der möglichen Mondbahnen in der Ekliptik mit $y_3 = 0$.

Wir erhalten damit die Bewegungsgleichungen des Mondes (mit $r = |\boldsymbol{y}|$)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - 2\dot{y}_2 &= \Big(3 - \frac{1}{r^3}\Big)\, y_1\,, \\ \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_1 &= -\frac{1}{r^3} y_2\,, \\ \ddot{y}_3 &= -\Big(\frac{1}{r^3} + 1\Big) y_3\,. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Da die Neigung der Mondbahn gegenüber der Ekliptik klein ist ($i \approx 5°$) bestimmen wir nach Hill (1878) zunächst periodische Bahnen in der 12-Ebene und dann, als deren Störung, die eigentliche Mondbahn.

3.2.3 Periodische Bahnen

Sei $y_3 \equiv 0$: Wir konstruieren eine 1-parametrige Schar periodischer Lösungen von (3.45), welche um $\boldsymbol{y} = 0$ im Gegenuhrzeigersinn kreisen, siehe Abbildung 3.6. Wir erhalten genau eine Bahn (bis auf Verschiebung der Zeit) durch jeden Punkt der (y_1, y_2)-Ebene in der Nähe von $\boldsymbol{y} = 0$. Zunächst ist aus (3.45) ersichtlich, dass mit jeder Lösung $(y_1(t), y_2(t))$ auch $(y_1(-t), -y_2(-t))$ und $(-y_1(-t), y_2(-t))$ Lösungen sind. Sie entstehen durch Zeitumkehr und anschließender Spiegelung an der 1- bzw. 2-Achse.

Für jeden Anfangspunkt $(y_1(0) > 0, y_2(0) = 0)$ auf der 1-Achse kann man immer eine vertikale Anfangsgeschwindigkeit $(\dot{y}_1(0) = 0, \dot{y}_2(0) > 0)$ so wählen, dass die Bahn die 2-Achse (zur Zeit $\pi\mu/2$) horizontal schneidet, d. h. $y_1(\pi\mu/2) = 0$, $\dot{y}_2(\pi\mu/2) = 0$ mit $\mu > 0$. Aus den oben erwähnten Symmetrien erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(-t)\,, & y_2(t) &= -y_2(-t)\,, \\ y_1(\pi\mu/2 + t) &= -y_1(\pi\mu/2 - t)\,, & y_2(\pi\mu/2 + t) &= y_2(\pi\mu/2 - t)\,. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Damit und mit der Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangsbedingungen, kann man jede Lösung von $t \in [0, \pi\mu/2]$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Insbesondere sind die

Bahnen periodisch, $\boldsymbol{y}(t+2\pi\mu)=\boldsymbol{y}(t)$, und oval (spiegelsymmetrisch bzgl. der 1- und 2-Achsen).

Wir wählen als Scharparameter die Umlaufszeit $2\pi\mu$ (synodischer Monat) und führen die neue Zeiteinheit

$$\tau=\frac{t}{\mu} \tag{3.47}$$

ein, so dass der synodische Monat (in Einheiten von τ) $=2\pi$ ist. Dann lautet (3.45) mit $'=d/d\tau$

$$\begin{aligned} y_1''-2\mu y_2' &= -\frac{\mu^2}{r^3}y_1+\underline{3\mu^2 y_1}\,,\\ y_2''+2\mu y_1' &= -\frac{\mu^2}{r^3}y_2\,,\\ y_3'' &= -\mu^2\Big(\frac{1}{r^3}+1\Big)y_3\,. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Ohne den unterstrichenen Term (Gezeitenkräfte), welchen wir als Störung behandeln, lauten die ersten beiden Gleichungen

$$(y_1+iy_2)''+2i\mu(y_1+iy_2)'=-\frac{\mu^2}{r^3}(y_1+iy_2).$$

Die gesuchte (nun 2π-)periodische Lösung ist eine Kreisbahn

$$y_1(\tau)+iy_2(\tau)=r_0e^{i\tau}\,,\qquad y_3(\tau)=0 \tag{3.49}$$

mit

$$r_0=\frac{\mu^{\frac{2}{3}}}{(1+2\mu)^{\frac{1}{3}}}\,. \tag{3.50}$$

Nachträglich können wir nun die Vernachlässigung der Gezeitenstörung in (3.48) rechtfertigen; wenn wir nämlich die Lösung (3.49) in den Korrekturterm einsetzen, ist er um μ^2 kleiner als der führende Term.

Wir möchten nun den Einfluss der Gezeitenkräfte in Störungstheorie in $\mu\ll 1$ berücksichtigen. Statt $\boldsymbol{y}$ führen wir durch

$$\begin{aligned} y_1+iy_2 &= \mu^{2/3}(1+2\mu)^{-1/3}e^{i\tau}z\,,\\ y_3 &= \mu^{2/3}(1+2\mu)^{-1/3}\zeta \end{aligned}$$

neue Koordinaten $(z,\zeta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ ein („Variation der Konstanten“). Sie sind der obigen Näherungslösung (3.49) angepasst ($z(\tau)=1,\zeta(\tau)=0$) und entsprechen einem Bezugssystem, welches sich zusätzlich mit einer Umdrehung pro Monat um die y_3-Achse dreht. Die Gleichungen (3.48) lauten nun

$$z''+2i(1+\mu)z'=(1+2\mu)\Big(1-\frac{1}{\rho^3}\Big)z+\underline{\frac{3}{2}\mu^2\left(z+e^{-2i\tau}z^*\right)}\,, \tag{3.51}$$

$$\zeta''=-\Big(\frac{1+2\mu}{\rho^3}+\mu^2\Big)\zeta\,, \tag{3.52}$$

mit $\rho^2 = |z|^2 + \zeta^2$. Natürlich ist ohne den Störterm die vorherige Näherungslösung (also $z(\tau) = 1$, $\zeta(\tau) = 0$) immer noch eine Lösung.

Wir setzen nun die gesuchte 2π-periodische Lösung als Potenzreihe in μ an[11]

$$z(\tau) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \mu^k z_k(\tau) \;\equiv\; 1 + \tilde{z}(\tau) \tag{3.53}$$

mit

$$\begin{aligned} z_k(\tau + 2\pi) &= z_k(\tau) \\ z_k(\tau)^* &= z_k(-\tau) \\ z_k\big(\tfrac{\pi}{2} + \tau\big)^* &= z_k\big(\tfrac{\pi}{2} - \tau\big)\,. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Zur Berechnung von $z_2(\tau)$ entwickeln wir zuerst $z\rho^{-3}$ in μ. In führender Ordnung ist $\zeta = 0$, und daher erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho^2 = |z|^2 &= (1+\tilde{z})(1+\tilde{z}^*) = 1 + (z_2 + z_2^*)\mu^2 + O(\mu^4) \\ \rho^{-3} &= 1 - \frac{3}{2}(z_2 + z_2^*)\mu^2 + O(\mu^4) \\ z\rho^{-3} &= 1 + \tilde{z} - \frac{3}{2}(\tilde{z} + \tilde{z}^*) + O(\mu^4) = 1 - \Big(\frac{1}{2}z_2 + \frac{3}{2}z_2^*\Big)\mu^2 + O(\mu^4)\,. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Vergleich der Terme $\propto \mu^2$ in (3.51) ergibt damit

$$z_2'' + 2iz_2' = \frac{3}{2}(z_2 + z_2^*) + \underline{\frac{3}{2}(1 + e^{-2i\tau})}\,. \tag{3.56}$$

Der Ansatz $z_2(\tau) = a_0 + a_- e^{-2i\tau} + a_+ e^{2i\tau}$ (mit $a_{0,\pm} \in \mathbb{R}$ wegen (3.54)) liefert[12]

$$z_2(\tau) = -\frac{1}{2} - \frac{19}{16}e^{-2i\tau} + \frac{3}{16}e^{2i\tau}\,. \tag{3.57}$$

Gleichung (3.57) beschreibt, in führender Ordnung, die ovale Gestalt der periodischen Bahn. Der Unterschied der „Halbachsen“ ist gegeben durch

$$\Delta = \mu^2\Big(z_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - z_2(0)\Big) \approx 2\mu^{2+2/3}\,. \tag{3.58}$$

Für $\mu = 0{,}08085$ ist das ungefähr $\Delta = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ (mit $z = 1$ dem Abstand Erde-Mond). In Wirklichkeit ist die Änderung des Abstandes größer und die Bahn des Mondes ist nicht perfekt periodisch.

[11] Der Störterm ist $O(\mu^2)$, also beginnt die Entwicklung (3.53) mit $k = 2$; (3.54) folgt aus (3.46).

[12] Die Lösung $z_2^0(\tau) = ae^{i\tau} - 3a^*e^{-i\tau}$ des homogenen Teils der Gleichung (3.56) genügt (3.54) nicht. Er trägt daher nicht bei.

3.2.4 Variationen der Bahn

Der Ansatz für Bahnen, die nahe bei der periodischen Lösung $(z(\tau), \zeta(\tau) \equiv 0)$ liegen, lautet

$$\big(z(\tau) + \hat{z}(\tau), \hat{\zeta}(\tau)\big)\,, \tag{3.59}$$

mit $\hat{z}$ und $\hat{\zeta}$ klein. Wir setzen diesen Ansatz in die Bewegungsgleichungen (3.51) und (3.52) ein, und linearisieren in $\hat{z}, \hat{\zeta}$. Man erhält damit die *Variationsgleichungen* der periodischen Lösung.

Da $\frac{\partial \rho}{\partial \zeta}\big|_{\zeta=0} = 0$ enthält die Variationsgleichung von (3.51) kein $\hat{\zeta}$, d. h. es kommt nur $\hat{z}$ vor. Insbesondere wird diese Gleichung durch $\hat{z} \equiv 0$ gelöst und wir können eine Variation betrachten, welche über der periodischen Bahn liegt. Die Variation von (3.52) lautet

$$\hat{\zeta}'' = -\Big(\frac{1+2\mu}{\rho^3} + \mu^2\Big)\hat{\zeta}\,, \tag{3.60}$$

wobei sich $\rho = \rho|_{\zeta=0}$ nur auf die periodische Bahn bezieht. Einsetzen von (3.57) in (3.55) führt auf

$$\rho^{-3} = 1 + \frac{3}{2}\mu^2(1 + e^{2i\tau} + e^{-2i\tau}) + O(\mu^4)\,. \tag{3.61}$$

Damit wird (3.60) zu

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}'' &= -\Big(1 + 2\mu + \frac{3}{2}\mu^2(1 + 2\cos 2\tau) + \mu^2 + \ldots\Big)\hat{\zeta} \\ &= -\Big(1 + 2\mu + \frac{5}{2}\mu^2 + 3\mu^2\cos 2\tau + \ldots\Big)\hat{\zeta}\,.\end{aligned} \tag{3.62}$$

Lassen wir zunächst den Term $\propto 3\mu^2\cos 2\tau$ weg, so erhalten wir die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillator in $\hat{\zeta}$ mit der Kreisfrequenz

$$r = \Big(1 + 2\mu + \frac{5}{2}\mu^2\Big)^{1/2} = 1 + \mu + \frac{3}{4}\mu^2 + \ldots\,. \tag{3.63}$$

in τ-Einheiten (mit $\mu = 1$). In beliebigen Einheiten ist dies gerade das Verhältnis (3.21) von synodischem zu drakonitischem Monat. In 1. Ordnung gilt $r = 1 + \mu$ in Übereinstimmung mit (3.23). Für den Mond mit $\mu = 0{,}08085$ (siehe (3.37)) ergibt sich (inklusive 2. Ordnung Korrektur)

$$r = 1{,}08575 \tag{3.64}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit (3.21).

Der Term $\propto 3\mu^2\cos 2\tau$ hat zur Folge, dass $\hat{\zeta}(\tau)$ zwar nicht mehr periodisch ist, aber eine mittlere Frequenz r besitzt. Wegen des oszillatorischen Verhaltens ist r davon jedoch erst in Ordnung μ^4 beeinflusst. Durch Berücksichtigung weiterer Glieder der Störungsrechnung von ζ, sowie von $\hat{z}(\tau) \neq 0$, verbessert sich die Übereinstimmung mit dem beobachteten Wert (3.21) noch weiter; z. B. in nächster Ordnung findet man

$$r = 1{,}08517\,. \tag{3.65}$$

Kapitel 4

Lagrange Mechanik

Wir wollen in diesem Kapitel die newtonschen Bewegungsgleichungen in die lagrangesche Formulierung bringen. Diese Formulierung hat ein paar wesentliche Vorteile. Konzeptuell werden *alle* Koordinatensysteme gleichbehandelt, d. h. der Formalismus bleibt auch in beschleunigten und gekrümmten Bezugssystemen gültig. Dies führt dazu, dass Scheinkräfte und Zwangsbedingungen automatisch berücksichtigt werden. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Lagrangefunktion ein Skalar ist, so dass man sich nicht mehr um die Richtung der Kräfte zu kümmern hat. In einem gewissen Sinne ist dieses Kapitel das Kernstück der Vorlesung. Es lohnt sich daher, das Material genau zu studieren. Insbesondere werden wir zwei der wichtigsten Resultate, das „hamiltonsche Prinzip“ und den „Satz von Noether“, herleiten.

4.1 Konfigurationsraum und Lagekoordinaten

Die Umformulierung der newtonschen Bewegungsgleichungen ist besonders nützlich für Systeme mit (holonomen) *Zwangsbedingungen*. In dieser Betrachtungsweise wird ein Teil der Kräfte indirekt dadurch beschrieben, dass die Bewegungsmöglichkeiten der Massenpunkte eingeschränkt wird.

Wir werden die relevanten Begriffe an drei Beispielen einführen:

(A) Das *mathematische Pendel:* Die Bewegung des in einer vertikalen Ebene schwingenden Massenpunktes dadurch eingeschränkt, dass der Faden den Abstand vom Aufhängepunkt fest hält (*Zwangsbedingung*). Die noch zulässigen Lagen des Pendels sind dann gegeben durch

$$\boldsymbol{x} = l(t)\boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{e}, t) \tag{4.1}$$

mit $l(t)$ der (zeitabhängigen) Fadenlänge. Der *Konfigurationsraum* des Pendels ist S^1 und die Bewegung des Pendels ist durch eine Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{e}(t) \in S^1$ bestimmt. Auf dem Konfigurationsraum kann die *Lagekoordinate* $\theta \in K \subset \mathbb{R}$

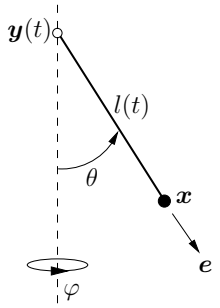


Abbildung 4.1: Sphärisches Pendel mit variablem Aufhängepunkt $\boldsymbol{y}(t)$ und Länge $l(t)$.

eingeführt werden mit $\boldsymbol{e}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Die offene Menge K nennt man dabei eine *Karte*. Die Abbildung $\boldsymbol{e}(\theta)$ ist nicht bijektiv, da $\boldsymbol{e}(2\pi) = \boldsymbol{e}(0)$. Zur bijektiven Darstellung von ganz S^1 benötigt man mindestens zwei Karten (einen Atlas). Diese Subtilität ist in diesem Kurs aber nicht wichtig.

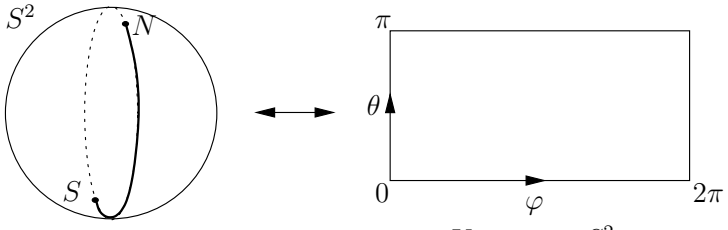
(B) Das *sphärische Pendel:* Der Aufhängepunkt $\boldsymbol{y}(t)$ und die Pendellänge $l(t)$ sind vorgeschriebene Funktionen der Zeit t, vgl. Abbildung 4.1. Die unter diesen Zwangsbedingungen noch zulässigen Lagen des Pendels sind

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}(t) + l(t)\boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{e}, t)\,, \tag{4.2}$$

wobei $\boldsymbol{e}$ ein Punkt auf der Einheitskugel S^2 ist (Konfigurationsraum des Pendels). Die Bewegung des Pendels ist durch eine Funktion $t \mapsto \boldsymbol{e}(t) \in S^2$ gegeben. Auf S^2 können nun Lagekoordinaten eingeführt werden; z. B. die Kugelkoordinaten θ, φ mit

$$\boldsymbol{e}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\,. \tag{4.3}$$

Dadurch wird der Konfigurationsraum auf ein Stück des $\mathbb{R}^2$ abgebildet:



Karte von S^2

Die Abbildung ist nicht bijektiv auf dem Rand des Rechtecks (bzw. auf dem Nullmeridian von S^2).

(C) Eine *Perle auf einem rotierendem Draht:* Auf einem parabelförmig gebogenen Draht, der sich mit der Winkelgeschwingkeit ω um die 3-Achse dreht, sitzt eine Perle (Massenpunkt). Die beiden Zwangsbedingungen werden durch die Parametrisierung

$$\boldsymbol{x} = R(\omega t)\Big(r\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\alpha r^2\boldsymbol{e}_3\Big) = R(\omega t)\Big(r, 0, \frac{1}{2}\alpha r^2\Big) \equiv \boldsymbol{x}(r, t) \tag{4.4}$$

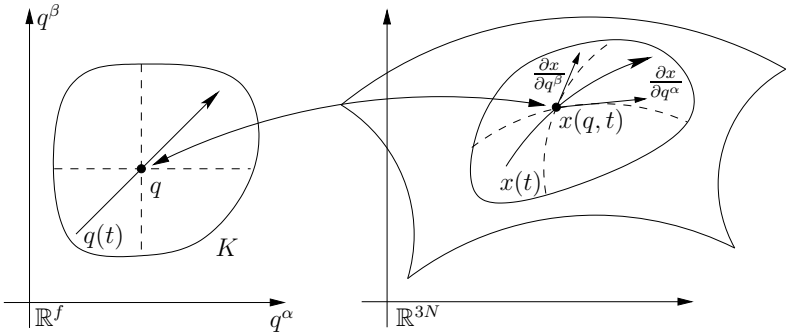


Abbildung 4.2: Abbildung von den Lagekoordinaten (links) auf die kartesischen Koordinaten (rechts). Die Tangentialvektoren $\partial x/\partial q^\alpha$ spannen in $\mathbb{R}^{3N}$ lokal den Vektorraum der virtuellen Verschiebungen auf.

erfüllt mit $R(\varphi)$ der Rotation um die 3-Achse mit dem Winkel φ und $r \in \mathbb{R}$ der Lagekoordinate. Der Konfigurationsraum des Problems ist $\{\boldsymbol{x}(r,t) \mid r \in \mathbb{R}\}$, d. h. isomorph zu $\mathbb{R}$.

Im Allgemeinen haben wir ein System von N Teilchen, deren Konfigurationsraum in kartesischen Koordinaten $x = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}^{3N}$ zur Zeit t eine glatte f-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^{3N}$ bilden; Zwangsbedingungen dieser Art werden „*holonome Zwangsbedingungen*“ genannt. Das System hat dann f *Freiheitsgrade.*[1] Wir beschreiben das System durch die Lagekoordinaten $q = (q^1, \ldots, q^f)$; d. h. wir haben (lokal) eine Karte $q \in K \subset \mathbb{R}^f$ und (für jedes $t \in \mathbb{R}$) eine Abbildung

$$x\colon K \to \mathbb{R}^{3N}, \text{ mit } q \mapsto x(q,t)\,, \tag{4.5}$$

welche in (q,t) differenzierbar ist. Wir brauchen zusätzlich, dass die Tangentialabbildung den Rang f hat; d. h. die Vektoren

$$\frac{\partial x}{\partial q^\alpha} \in \mathbb{R}^{3N}\,, \qquad (\alpha = 1, \ldots, f)\,, \tag{4.6}$$

sollen linear unabhängig sein. Somit bilden die Tangentialvektoren (4.6) an jedem Punkt (q,t) einen f-dimensionalen Vektorraum, siehe Abbildung 4.2.

Jede zulässige (mit dem Zwangsbedingungen verträgliche) Bewegung $x(t)$ des Systems (im Bereich der Karte K) ist dann durch eine Funktion $t \mapsto q(t) \in K$ mittels

$$x(t) \equiv x(q(t), t) \tag{4.7}$$

induziert.

Um nun die Bewegungsgleichungen eines Systems in den Lagekoordinaten $q = (q^1, \ldots, q^f)$ zu formulieren, benötigen wir die folgenden Begriffe.

[1] Im Beispiel B ist $N = 1$ und $f = 2$. Wir haben also zwei Freiheitsgrade.

Geschwindigkeiten, kinetische Energie: Mit (4.7) sind die zur Zeit t am Ort q zulässigen Geschwindigkeiten $\dot{x} = (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N)$ gegeben durch

$$\dot{x} = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial x}{\partial q^\alpha}(q,t)\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial x}{\partial t}(q,t) \equiv \dot{x}(q,\dot{q},t) \tag{4.8}$$

mit beliebigen *verallgemeinerten Geschwindigkeiten* $\dot{q} = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^f) \in \mathbb{R}^f$. Die Geschwindigkeiten $\dot{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ liegen damit (erzwungenerweise) in dem Vektorraum aufgespannt durch $\partial x/\partial q^\alpha$ und $\partial x/\partial t$, aber nicht notwendigerweise im Tangentialraum. Mit (4.8) wird $\dot{x}$ zu einer Funktion der *unabhängigen* Variablen[2]

$$(q, \dot{q}, t) \in K \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}.$$

Damit lässt sich auch die kinetische Energie T als neue Funktion

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i^2 \equiv T(q,\dot{q},t) \tag{4.9}$$

auffassen. Wegen (4.8) gilt

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial q^\alpha} \tag{4.10}$$

und damit

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q^\alpha}. \tag{4.11}$$

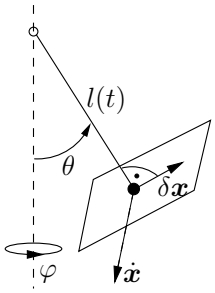
Virtuelle Verschiebungen: An einem Punkt (q,t) ist die (Richtungs-)*Ableitung* der Funktion $x(q,t)$ bei *festem* t eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^f \ni \delta q \mapsto \delta x \in \mathbb{R}^{3N}$, definiert durch

$$\delta x = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial x}{\partial q^\alpha}\, \delta q^\alpha. \tag{4.12}$$

Die zulässigen Vektoren des Bildes δx sind die Tangentialvektoren am Punkt (q,t). Man nennt die zulässigen δx auch den Raum der *virtuelle Verschiebungen* des Systems aus der Lage $x(q,t)$ zur Zeit t.

[2] Im lagrangeschen Formalismus ist es essentiell $(q,\dot{q},t)$ als unabhängige Variablen aufzufassen. Dabei sind $\dot{q}$ nach (4.8) die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors im Tangentialraum wärend (q,t) den Punkt x festlegen, an den der Tagentialraum gebildet wird.

Für die Beispiele A und C ist der Konfigurationsraum eindimensional. Der Raum der virtuellen Verschiebungen ist daher einfach die Tangente an den Kreis (für A) bzw. an die Parabel (für C) am Punkt $x(q,t)$. Für das sphärische Pendel (Beispiel B) entspricht $\delta\boldsymbol{x}$ einer Variation der Lagekoordinaten θ, φ bei fester Zeit und steht damit senkrecht auf dem Faden $\boldsymbol{e}$.



Der Vergleich von (4.12) mit (4.8) zeigt, dass $\dot{x}$ bei zeitabhängigen Zwangsbedingungen im Allgemeinen *keine* virtuelle Verschiebung ist.

Virtuelle Arbeit, verallgemeinerte Kräfte und Impulse: Es seien $(\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_N)$ die Kräfte, welche in der Lage $x(q,t)$ auf die Teilchen wirken. Ihre *virtuelle Arbeit* ist definiert als[3]

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{x}_i. \tag{4.13}$$

Mit (4.12) können wir diese Beziehung umschreiben als

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^{f} K_\alpha \delta q^\alpha \equiv \langle K, \delta q \rangle \tag{4.14}$$

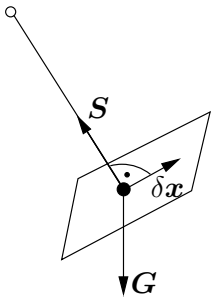
mit den Koeffizienten (*verallgemeinerte Kräfte*)

$$K_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q^\alpha}(q,t). \tag{4.15}$$

Nach Konstruktion hängt der Ausdruck (4.14) nicht von der Wahl der Lagekoordinaten ab.

Die Kräfte, welche durch die Einschränkung (4.5) der zulässigen Konfigurationen $x \in R^{3N}$ des Systems herrühren, heißen *Zwangskräfte*, die restlichen *treibende Kräfte*. Für das Beispiel B des sphärischen Pendels ist die

Fadenspannung $\boldsymbol{S}$ eine Zwangskraft und die Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$ eine treibende Kraft. Man beachte, dass $\boldsymbol{S} \perp \delta\boldsymbol{x}$. Das *Prinzip von d'Alembert* postuliert, dass diese Aussage im Allgemeinen gilt: „Zwangskräfte stehen senkrecht auf den virtuellen Verschiebungen und leisten *keine virtuelle Arbeit*." Damit tragen Zwangskräfte nicht zu den verallgemeinerten Kräften K_α bei und müssen im lagrangeschen Formalismus gar nicht erst berechnet werden. Obwohl Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit leisten, können sie bei zeitabhängigen Zwangsbedinungen *reale Arbeit* leisten mit $\boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \neq 0$ (obwohl $\boldsymbol{S} \cdot \delta\boldsymbol{x} = 0$).



[3] Die virtuelle Kraft δA ist eine Abbildung der virtuellen Verschiebung auf die reelen Zahlen. Beachten Sie, dass δA im Allgemeinen keine Ableitung einer Funktion $A(q,t)$ ist; siehe auch Kap. 4.3.

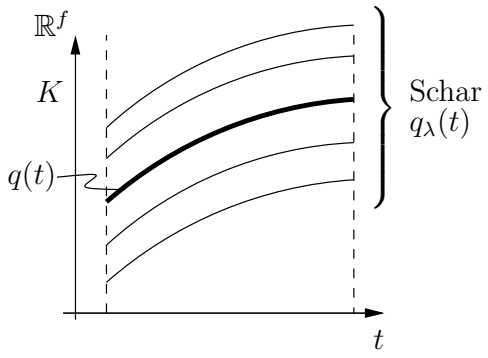


Abbildung 4.3: Die Bahn $q(t)$ wird eingebettet in einer Schar $q_\lambda(t)$ von Kurven, so dass $q_0(t) = q(t)$ (fette Linie).

Analog zu den verallgemeinerten Kräften K_α definiert man zudem die *verallgemeinerten Impulse* p_α über

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i}_{=\boldsymbol{p}_i} \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, \delta q^\alpha \equiv \langle p, \delta q \rangle, \tag{4.16}$$

d. h.

$$p_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}. \tag{4.17}$$

Die letzte Gleichung folgt dabei aus (4.11). Mit (4.9) erhalten wir damit die Beziehung $p_\alpha = p_\alpha(q, \dot{q}, t)$.

Variation einer Bahn: Als letzte Vorbereitung führen wir den Begriff der Variation der Bahn ein. Die Variation einer Bahn verallgemeinert den Begriff der Richtungsableitung (partiellen Ableitung nach einer Variablen) auf die „Ableitung“ nach einer Funktionen $\delta q^\alpha(t)$.

Zu einer Bahn $q(t)$ bilden wir eine beliebige 1-parametrige Schar von Kurven $q_\lambda(t)$ derart, dass $q_0(t) = q(t)$, siehe Abbildung 4.3. Die *Variation* einer Funktion $F(q, \dot{q}, t)$ ist dann definiert als

$$\delta F(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} F(q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t), t)\Big|_{\lambda=0} \tag{4.18}$$

mit

$$q^\alpha_\lambda(t) = q^\alpha(t) + \lambda \, \delta q^\alpha(t). \tag{4.19}$$

Die f Funktionen $\delta q^\alpha \colon \mathbb{R} \to K$ sind dabei frei wählbar. Sie entsprechen den Variationen von $q^\alpha(t)$. Wir werden später den Zusammenhang

$$\delta \dot{q}^\alpha(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \dot{q}^\alpha_\lambda(t)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{dt} \, \delta q^\alpha(t), \tag{4.20}$$

benötigen, welcher die Variationen $\delta \dot{q}^\alpha$ mit den Variationen δq^α verknüpft.

Es ist einfach nachzuprüfen, dass die Variation der Lage δx gerade den virtuellen Verschiebungen aus (4.12) entsprechen. Damit folgt, dass eine Variation δF einer beliebigen Funktion $F(x, t)$ eine virtuelle Verschiebung ist.

4.2 Bewegungsgleichungen

Mit diesen Vorbemerkungen können wir die Bewegungsgleichungen koordinatenfrei formulieren, so dass sie in jedem Bezugssystem gültig sind.

Sei $q(t)$ eine *mechanische Bahn*, d. h. $x(q(t),t)$ ist eine Lösung der newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{F}_i. \tag{4.21}$$

Dann gilt für *jede* Variation einer mechanischen Bahn

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle p,\delta q\rangle &\overset{(4.16)}{=} \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i\cdot\delta\boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{x}}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i\cdot\delta\boldsymbol{x}_i\\ &= \delta\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2\right) + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{x}_i.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Damit haben wir die Bewegungsgleichungen (4.21) für beliebige Lagekoordinaten q in die Form

$$\frac{d}{dt}\langle p,\delta q\rangle = \delta T + \delta A \tag{4.23}$$

gebracht. Die Kräfte sind dabei nur noch in der Form der virtuellen Arbeit enthalten. Da die Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit leisten, genügt es die treibenden Kräfte zu bestimmen, so dass wir im Folgenden mit $\boldsymbol{F}_i$ nur noch die treibenden Kräfte bezeichnen.

Ausgehend von (4.23), erhalten wir sofort die explizite Form

$$\sum_{\alpha=1}^{f}(\dot{p}_\alpha\delta q^\alpha + \underline{p_\alpha\delta\dot{q}^\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \underline{\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^\alpha}\delta\dot{q}^\alpha} + K_\alpha\delta q^\alpha\right) \tag{4.24}$$

der Bewegungsgleichungen. Die unterstrichenen Terme kürzen sich nach (4.17) weg. Da für festes t die Variationen $\delta q^\alpha(t)$ beliebig wählbar sind, müssen die Vorfaktoren verschwinden, d. h. es gilt

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + K_\alpha. \tag{4.25}$$

Mit der Relation (4.17) erhalten wir damit die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = K_\alpha, \qquad (\alpha = 1,\ldots,f). \tag{4.26}$$

für beliebige Lagekoordinaten $q = (q^1,\ldots,q^f)$. Dies sind f Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Funktionen $q^\alpha(t)$ bei gegebenen verallgemeinerten Kräften $K_\alpha = K_\alpha(q,\dot{q},t)$. Man beachte, dass sich hier und im Folgenden die totale Zeitableitung (d/dt) darauf bezieht, dass man die Ableitung entlang einer Bahn $q(t)$ ausführt.

Bemerkung: Man kann die Bewegungsgleichungen (4.26) auch ohne den Begriff der virtuellen Verschiebung herleiten. Mit (4.9) und (4.11) finden wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q^\alpha} + \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q^\alpha}, \\ \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_i}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q^\alpha}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Zusammen mit (4.15) und (4.21) folgt damit direkt das Endresultat (4.26).

4.3 Lagrangesche Systeme

Der lagrangesche Formalismus wird besonders schön, falls die treibenden Kräfte $\boldsymbol{F}_i$ ein Potential $V(x,t)$ besitzen mit $\boldsymbol{F}_i = -\partial_{\boldsymbol{x}_i} V(x,t)$; man nennt ein solches Kraftfeld *konservativ*. Dann gilt nämlich,

$$\delta A = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = -\sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha, \tag{4.28}$$

so dass $-\delta A$ die Variation von $V(q,t) \equiv V(x(q,t),t)$ ist. Damit folgt sofort

$$K_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}, \tag{4.29}$$

so dass $V(q,t)$ das *Potential* der verallgemeinerten Kräfte ist. Mit der *Lagrangefunktion*

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,t) \tag{4.30}$$

ergeben sich aus (4.26) die *Euler-Lagrange Gleichungen*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, f) \tag{4.31}$$

für eine mechanische Bahn.

Die Bewegungsgleichungen eines Systems mit Zwangsbedingungen kann man daher im Allgemeinen wie folgt aufstellen:

1. Man schreibe $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i^2$, $V = V(x)$ (in einem Inertialsystem) in kartesischen Komponenten ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingungen auf.

2. Man drücke die (gemäß der Zwangsbedingungen zulässigen) Konfigurationen $x = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ durch unabhängige Lagekoordinaten $q = (q^1, \ldots, q^f)$ aus. Mit $x = x(q,t)$ berechnet man $\dot{x} = \dot{x}(q,\dot{q},t)$.

3. Man setze $x, \dot{x}$ in $L = T - V$ ein.

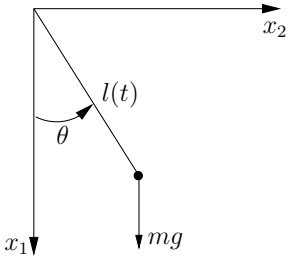
4. Man stelle die Euler-Lagrange Gleichungen (4.31) auf.

Diese Vorgehensweise soll nun an ein paar Beispielen illustriert werden.

Beispiel 1: (siehe A)

Ebenes Pendel mit festem Aufhängepunkt und vorgeschriebener, zeitabhängiger Länge $l(t)$. Die Lagekoordinate sei θ. Aus

$$\boldsymbol{x} = l(\cos\theta, \sin\theta) = l\,\boldsymbol{e}(\theta)$$
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{l}(\cos\theta, \sin\theta) + l\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta)$$



berechnet man

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + \left(l\dot{\theta}\right)^2\right), \qquad V = -mgx_1 = -mgl\cos\theta\,,$$

und daraus

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta\,.$$

Damit lautet die Euler-Lagrange Gleichung (4.31)

$$\frac{d}{dt}(ml(t)^2\dot{\theta}) + mgl(t)\sin\theta = 0\,. \tag{4.32}$$

was gerade dem Drehimpulssatz entspricht.

Bemerkung: Die Fadenspannung $\boldsymbol{S}$ als Zwangskraft wird im Formalismus nicht berücksichtigt. Sie leistet aber Arbeit, da $\dot{\boldsymbol{x}}$ in diesem Beispiel keine virtuelle Verschiebung ist. Daher ist die Energie $T + V$ nicht erhalten. Man findet

$$\frac{d}{dt}(T+V) = m(\dot{l}\,\ddot{l} + l^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + l\dot{l}\dot{\theta}^2) - mg\dot{l}\cos\theta + mgl\dot{\theta}\sin\theta\,. \tag{4.33}$$

Unter Ausnutzung der Bewegungsgleichung (4.32) erhält man

$$\frac{d}{dt}(T+V) = m\dot{l}(\ddot{l} - l\dot{\theta}^2 - g\dot{l}\cos\theta)\,. \tag{4.34}$$

Die rechte Seite entspricht gerade der Leistung $\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$ der Zwangskraft. Da wir wissen, dass $\boldsymbol{S}$ in Richtung des Fadens zeigt, können wir die Fadenspannung in diesem Fall explizit bestimmen und erhalten

$$\boldsymbol{S} = m(\ddot{l} - l\dot{\theta}^2 - g\cos\theta)\boldsymbol{e}(\theta)\,. \tag{4.35}$$

Der letzte Term entspricht daher der Gegenkraft der Gewichtskraft entlang des Fadens. Der erste Term ist die Gegenkraft der Führungskraft und der zweite

Term die Gegenkraft der Zentrifugalkraft. Diese Kräfte müssen alle durch die Fadenspannung aufgehoben werden, damit die Zwangsbedingung $|\boldsymbol{x}| = l$ erfüllt bleibt. Diese Kräfte werden im Lagrangeformalismus nicht benötigt und damit normalerweise überhaut nicht erst berechnet.

Beispiel 2: (siehe B)

Wir behandeln das sphärische Pendel mit $l(t) \equiv l$ und $\boldsymbol{y}(t) \equiv 0$. Die Lage des Pendels ist gegeben durch

$$\boldsymbol{x} = l(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

Durch Ableiten nach t erhalten wir den Ausdruck

$$\dot{\boldsymbol{x}} = l\dot{\theta}(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) + l\sin\theta\,\dot{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

für den Geschwindigkeitsvektor. Damit ergibt sich die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) \tag{4.36}$$

und die potentielle Energie $V = -mgx_3 = -mgl\cos\theta$. Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) + mgl\cos\theta. \tag{4.37}$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial\theta} = ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2.$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten damit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) - ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + mgl\sin\theta &= 0,\\ \frac{d}{dt}(ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}) &= 0.\end{aligned}$$

Beispiel 3: (siehe C) Für die Perle auf einem rotierenden Draht erhalten wir mit (4.4) direkt (man beachte, dass $R^t\dot{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$)

$$\begin{aligned}R^t\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{\omega}\times\left(r\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\alpha r^2\boldsymbol{e}_3\right) + (\boldsymbol{e}_1 + \alpha r\boldsymbol{e}_3)\dot{r}\\ &= \omega r\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{e}_1 + \alpha r\boldsymbol{e}_3)\dot{r}.\end{aligned}$$

Damit ist die kinetische Energie gegeben durch

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{2}m(R^t\dot{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \frac{1}{2}m(1+\alpha^2r^2)\dot{r}^2.$$

Die potentielle Energie auf Grund der Gewichtskraft hat die Form $V(r) = mgx_3 = \frac{1}{2}mg\alpha r^2$. Damit erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m(1+\alpha^2 r^2)\dot r, \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = m(\omega^2 - \alpha g)r + m\alpha^2 r\dot r^2.$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen haben die Form

$$\frac{d}{dt}\Big(m(1+\alpha^2 r^2)\dot r\Big) - m(\omega^2-\alpha g)r - m\alpha^2 r\dot r^2 = 0.$$

Beispiel 4: *Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld*

Aus den homogenen Maxwellgleichungen[4]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0\,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

folgt direkt, dass sich das magnetische $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ das und elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ durch elektromagnetische Potentiale $\varphi, \boldsymbol{A}$ darstellen lassen mit

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\,, \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\,. \tag{4.38}$$

Die Bewegung eines Teilchens (in kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$) ist bestimmt durch die Lagrangefunktion

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - e\Big(\varphi(\boldsymbol{x},t) - \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c}\cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\Big)\,, \tag{4.39}$$

wobei m die Masse und e die Ladung des Teilchens sind. In der Tat ist

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{e}{c}\sum_{i=1}^3 \dot x_i \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot x_k} = m\dot x_k + \frac{e}{c}A_k\,,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x_k} = m\ddot x_k + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\dot x_i\right),$$

so dass die Euler-Lagrange Gleichungen (4.31)

$$m\ddot x_k = e\underbrace{\Big(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}\Big)}_{E_k} + \frac{e}{c}\underbrace{\sum_{i=1}^3 \dot x_i\Big(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\Big)}_{(\dot{\boldsymbol{x}}\times \boldsymbol{B})_k}\,,$$

mit (1.16) übereinstimmen.

[4] Wir verwenden gaußsche Einheiten.

Beispiel 5: *Doppelpendel*

Beim (ebenen) Doppelpendel bewegen sich zwei Massepunkte unter dem Einfluss eines homogenen Schwerefeldes in einer vertikalen Ebene, der erste mit einem festen Abstand l_1 von einem festgehaltenen Punkt (den wir als den Urspung wählen), und der zweite mit einem festen Abstand l_2 vom ersten Massepunkt. Wir bezeichnen die Auslenkungen von der Vertikalten vom jeweiligen Aufhängepunkt durch die Lagekoordinaten θ_1 und θ_2. Dann sind die Ortskoordinaten (in der Ebene)

$$\boldsymbol{x}_1 = l_1(\cos\theta_1, \sin\theta_1)\,, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + l_2(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$$

und der Konfigurationsraum ist $S^1 \times S^1$.

Für die kinetische Energie findet man mit $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = l_1\dot{\theta}_1(-\sin\theta_1, \cos\theta_1)$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2\,,$$

während die potentielle Energie gegeben ist durch

$$V = -m_1 l_1 g\cos\theta_1 - m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2).$$

Die Lagrangefunktion ist einfach $L = T - V$. Daraus kann man dann leicht die Bewegungsgleichungen ableiten. Das Doppelpendel ist jedoch *nicht integrabel*: die Bewegungsgleichungen können nicht auf die Berechnung von Integralen zurückgeführt werden. In der Tat weisen numerische Berechnungen (und Experimente) auf ein „chaotisches Verhalten“ hin. Das Verhalten des Doppelpendels hängt nach endlicher Zeit bereits in starker Weise von minimalen Änderungen der Anfangsbedingungen ab.

Bemerkung: Allgemeiner als in (4.30) nennt man ein System ein *lagrangesches System*, falls es eine Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ gibt, so dass die Bewegungsgleichungen durch die Euler-Lagrange Gleichungen (4.31) gegeben sind. Wir haben in Beispiel 4 schon so ein System untersucht. Mit (4.31) erhält man in diesem Fall

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle p, \delta q\rangle = \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\,\delta q^\alpha &\overset{(4.31)}{=} \sum_{\alpha=1}^{f}\Big(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\,\delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\,\delta\dot{q}^\alpha\Big)\\ &= \delta L\end{aligned} \tag{4.40}$$

für eine mechanische Bahn mit den *verallgemeinerten Impulsen*

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}. \tag{4.41}$$

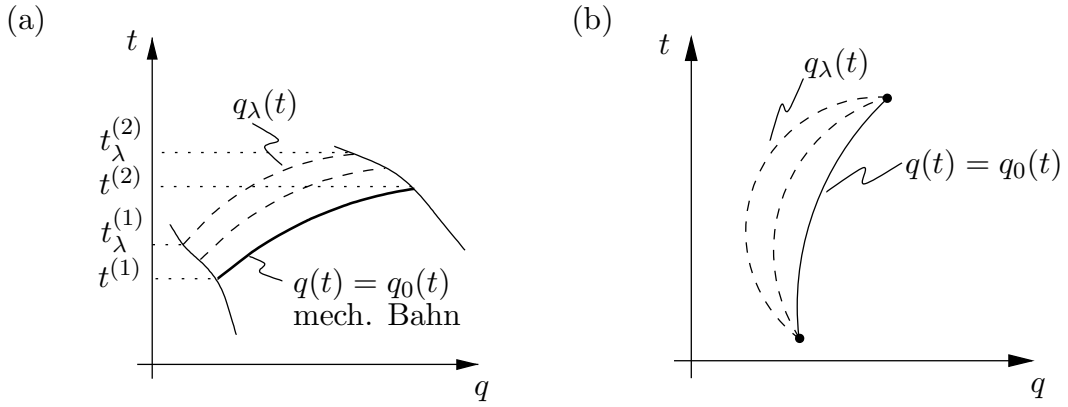


Abbildung 4.4: Variation einer mechanischen Bahn $q(t)$ mit (a) oder ohne (b) Änderung der Endpunkte $q^{(0)}$, $q^{(1)}$.

4.4 Das hamiltonsche Prinzip

Die Gesetze der Mechanik lassen sich für lagrangesche Systeme aus einem Extremalprinzip ableiten. Das Extremalprinzip nennt man das Prinzip der „kleinsten“ Wirkung oder auch hamiltonsches Prinzip. Dazu definieren wir die *Wirkung* einer Bahn $q(t)$ $(t^{(1)} \le t \le t^{(2)})$ als

$$S[q(t)] = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t). \tag{4.42}$$

Wir berechnen die Variation δS der Wirkung um eine mechanische Bahn. Dabei erlauben wir die Möglichkeit, dass auch die Endpunkte variiert werden; d. h. die Endpunkte $q_\lambda(t_\lambda^{(i)})$ der Vergleichsbahnen $q_\lambda(t)$ sind im Allgemeinen ebenfalls Funktionen des Variationsparameters λ, vgl. Abbildung 4.4. Wir schreiben für die *Variation der Endpunkte*,

$$\begin{aligned} \Delta t^{(i)} &\equiv \left.\frac{dt_\lambda^{(i)}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}, \\ \Delta q^{(i)} &\equiv \left.\frac{d}{d\lambda} q_\lambda(t_\lambda^{(i)})\right|_{\lambda=0} = \delta q^{(i)} + \dot{q}\, \Delta t^{(i)} \end{aligned} \tag{4.43}$$

mit $\delta q^{(i)} = \delta q(t^{(i)})$, wobei sich δq (wie immer) auf die Variation bei fester Zeit bezieht. Mit diesen Vorüberlegungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{d}{d\lambda} \int_{t_\lambda^{(1)}}^{t_\lambda^{(2)}} L(q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t), t)\, dt \,\Big|_{\lambda=0} = \int_{(1)}^{(2)} \delta L\, dt + L\, \Delta t \Big|_{(1)}^{(2)} \\ &\overset{(4.40)}{=} \Big(\langle p, \delta q \rangle + L\, \Delta t \Big) \Big|_{(1)}^{(2)} \end{aligned}$$

Mit (4.43) erhält man daraus die allgemeine Formel

$$\delta S = \Big(\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, \Delta q^\alpha - \Big(\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, \dot{q}^\alpha - L \Big) \Delta t \Big) \Big|_{(1)}^{(2)} \tag{4.44}$$

für die Variation einer mechanische Bahn. Insbesondere gilt

$$\delta S = \delta \int_{(1)}^{(2)} L \, dt = 0 \tag{4.45}$$

für eine beliebe Variation einer mechanischen Bahn mit *festen Endpunkten.*

Dies ist der Inhalt des *hamiltonschen Prinzips*:

> *Die Wirkung einer mechanischen Bahn $q(t)$ ist stationär (nicht notwendigerweise minimal) bezüglich einer beliebigen Schar $q_\lambda(t)$ von Variationsbahnen mit festen Endpunkten.*

Aus dem hamiltonschen Prinzip ergeben sich umgekehrt nach dem Ausführen der Variation auch sofort die Euler-Lagrange Gleichungen. Wir haben

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{(1)}^{(2)} \delta L \, dt = \int_{(1)}^{(2)} \sum_{\alpha=1}^{f} \Big(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \Big) dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, \delta q^\alpha \Big|_{(1)}^{(2)} - \int_{(1)}^{(2)} \sum_{\alpha=1}^{f} \Big(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \Big) \delta q^\alpha \, dt \end{aligned}$$

nach partieller Integration. Bei festen Endpunkten ist $\delta q^\alpha(t) = 0$ für $t = t^{(1)}, t^{(2)}$ und deshalb folgt direkt (4.31). Damit haben wir gezeigt, dass das hamiltonsche Prinzip äquivalent zu den Euler-Lagrange Gleichungen ist.

4.4.1 Äquivalente Lagrangefunktionen

Zwei Lagrangefunktionen L_1 und L_2, die sich nur um die totale zeitliche Ableitung einer Funktion $F(q,t)$ unterscheiden,

$$L_1 - L_2 = \frac{d}{dt} F(q,t) \equiv \sum_\alpha \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} \, , \tag{4.46}$$

beschreiben dieselbe Dynamik, d. h. führen zu denselben Euler-Lagrange Gleichungen. Dies folgt direkt aus dem hamiltonschen Prinzip. Bei festen Endpunkten ist nämlich für eine ansonsten beliebige Variation

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \frac{d}{dt} F(q,t) dt = \delta F(q,t) \Big|_{(1)}^{(2)} = 0 \tag{4.47}$$

und damit $\delta S_1 = \delta S_2$. Natürlich kann man auch direkt zeigen, dass L_1 und L_2 zu denselben Euler-Lagrange Gleichungen führen.

Beispiel 4 (Fortsetzung): Ändert man die Potentiale $(\varphi, \boldsymbol{A})$ um eine *Eichtransformation*

$$\varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\,, \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi\,, \tag{4.48}$$

wobei χ eine beliebige skalare Funktion ist, so ändert sich das elektromagnetische Feld (4.38) nicht. Daher sollten auch die Bewegungsgleichung (1.16) invariant sein. In der Tat geht L, gegeben in Gl. (4.39), unter einer Eichtransformation (4.48) in die äquivalente Lagrangefunktion

$$L + \frac{e}{c}\Big(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\chi\Big) = L + \frac{e}{c}\frac{d\chi}{dt}$$

über.

4.5 Erhaltungsgrößen und Satz von Noether

4.5.1 Erhaltungsgrößen

Eine Funktion $f(q, \dot{q}, t)$ heißt *Erhaltungsgröße* oder *Konstante der Bewegung*, wenn für *alle* mechanischen Bahnen $q(t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} f(q, \dot{q}, t) = 0,$$

so dass f unter der Bewegung konstant bleibt. In Kapitel 1.4 haben wir schon die Erhaltungsgrößen Impuls, Drehimpuls und Energie kennengelernt.

Die Euler-Lagrange Gleichung (4.31) ist eine 2. Ordnung Differentialgleichung in den f Freiheitsgraden der Lagekoordinaten. Deshalb benötigt man im Allgemeinen $2f$-Integrationen, um das Problem zu lösen. Erhaltungsgrößen sind außerordentlich wichtig, da jede (unabhängige) Erhaltungsgröße die Zahl der Integrationen, welche für die Lösung der Bewegungsgleichungen erforderlich sind, um eins erniedrigt.

Beispiel: Für das Zweikörperproblem aus Kap. 2 haben wir $f = 3N = 6$ Freiheitsgrade (mit $N = 2$). Das galileische Relativitätsprinzip liefert die 10 Erhaltungssätze aus Kap. 1.4. Damit verbleiben im Allgemeinen die $2f - 10 = 2$ Integrationen von (2.12) und (2.14). Für das Keplerproblem haben wir zusätzlich den LRL-Vektor gefunden, welcher eine zusätzliche unabhängige Erhaltungsgröße liefert. Damit konnten wir die Bahn ohne Integration finden und die einzige verbleibende Integration ist die Bestimmung der Zeit $t(r)$ aus (2.12).

4.5.2 Zyklische Variablen

Sei L die Lagrangefunktion eines lagrangeschen Systems. Falls L unabhängig von einer Lagekoordinate q^α ist, d. h. falls $\partial L/\partial q^\alpha = 0$, dann nennt man die Koordinate q^α

zyklisch. Für jede zyklische Variable q^α gilt dann, wegen der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}p_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \tag{4.49}$$

d. h. der verallgemeinerte Impuls $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}^\alpha$ ist eine Erhaltungsgröße.

Beispiel 2 (Fortsetzung): Betrachten wir nochmals das sphärischen Pendel. Die Lagrangefunktion L hängt nach Gl. (4.37) nicht von φ ab. Die zugehörigen Erhaltungsgröße ist der verallgemeinerte Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\, l^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}\,,$$

was gerade dem Drehimpuls um die vertikale Achse entspricht. Dieser ist erhalten, da in vertikaler Richtung kein Drehmoment wirkt.

Die Tatsache, dass die Lagrangefunktion L nicht von einer zyklischen Variablen q^α abhängt, ist äquivalent dazu, dass die lagrangesche Funktion unter der Verschiebung $\phi_\lambda(q)$ der Lagekoordinaten, mit

$$[\phi_\lambda(q)]^\beta = q^\beta + \delta^{\beta\alpha}\lambda \tag{4.50}$$

invariant bleibt, d. h. mit $q_\lambda(t) = \phi_\lambda(q(t))$ folgt $L(q_\lambda, \dot{q}_\lambda, t) = L(q, \dot{q}, t)$ unabhängig von λ.[5] Diese Neuformulierung illustriert die Idee des Satzes von Noether.

4.5.3 Satz von Noether

Man kann viele der Erhaltungsgrößen, welche wir bisher gefunden haben, aus dem Satz von Noether erhalten. Wir nennen eine Schar $\phi_\lambda\colon \mathbb{R}^f \to \mathbb{R}^f$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, von Abbildungen der Lagekoordinaten[6] auf sich selbst einen *Fluss*, falls sie der Gruppeneigenschaft[7]

$$\phi_0 = \mathrm{id}\,, \qquad \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_{\lambda+\mu} \tag{4.51}$$

genügt. Jeder Fluss hat ein *erzeugendes Vektorfeld* $v(q)$ auf $\mathbb{R}^f$, das durch

$$v(q) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\phi_\lambda(q)\Big|_{\lambda=0} \in \mathbb{R}^f \tag{4.52}$$

definiert ist, vgl. Abbildung 4.5. Wegen der Gruppeneigenschaft des Flusses gilt (4.52) tatsächlich für alle $(\lambda, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^f$, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\phi_\lambda(q) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\phi_{\lambda+\varepsilon}(q)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\phi_\varepsilon(\phi_\lambda(q))\Big|_{\varepsilon=0} = v(\phi_\lambda(q))\,. \tag{4.53}$$

[5] Das Kronecker-Symbol $\delta^{\alpha\beta}$ ist definiert durch $\delta^{\alpha\beta} = 1$ für $\alpha = \beta$ und $\delta^{\alpha\beta} = 0$ sonst.
[6] Wir behandeln vereinfachend zuerst den Fall, dass die Karte ganz $\mathbb{R}^f$ umfasst.
[7] Hierbei ist id die Identitätsabbildung mit $\mathrm{id}(x) = x$.

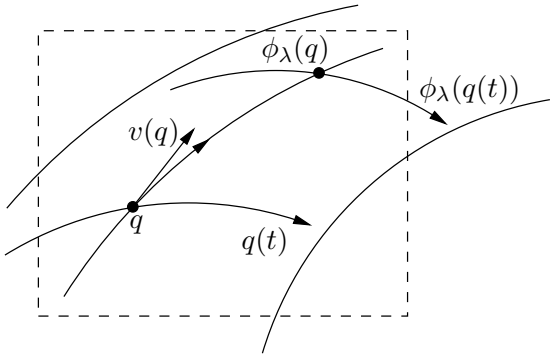


Abbildung 4.5: Das Vektorfeld $v(q)$ am Punkt q erzeugt den Fluss $\phi_\lambda(q)$, d. h. der Punkt q wird durch den Fluss (lokal) entlang von $v(q)$ verschoben. Ausgehend von einer Bahn $q(t)$ erhält man damit die Schar $q_\lambda(t) = \phi_\lambda(q(t))$. Falls die Karte K nur einen Teilraum von $\mathbb{R}^f$ umfasst, benötigt man nur einen Ausschnitt des Flusses (gestricheltes Rechteck).

Die Funktion $f(\lambda) = \phi_\lambda(q)$ ist also die Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = v(f(\lambda)), \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } f(0) = q\,. \tag{4.54}$$

Damit bestimmt umgekehrt das Vektorfeld den Fluss.[8] Der Begriff des Flusses lässt sich auf auch einen allgemeinen Konfigurationsraum übertragen: In einer Karte ist jeweils nur ein Ausschnitt des Flusses ϕ_λ darstellbar; im Allgemeinen benötigt man mehrere Karten (einen Atlas), um den ganzen Konfigurationsraum zu überdecken.

Sei nun $q(t)$ eine beliebige Kurve im Konfigurationsraum. Der Fluss ϕ_λ bildet die Kurve $q(t)$ auf die Schar $q_\lambda(t) = \phi_\lambda(q(t))$ ab. Wir nennen den Fluss ϕ_λ eine *kontinuierliche Symmetrie* der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$, falls

$$L(q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{d}{dt} F_\lambda(q(t), t) \tag{4.55}$$

gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für jede Kurve $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^f$; d. h. die Lagrangefunktion wird unter dem Fluss auf eine äquivalente Lagrangefunktion abgebildet. Mit $F \equiv 0$ nennt man die Lagrangefunktion *invariant* unter der kontinuierlichen Symmetrie.

Damit können wir den *Satz von Noether* formulieren:

Sei ϕ_λ eine kontinuierliche Symmetrie von L, dann ist

$$\langle p, v(q)\rangle - \delta F \equiv \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha(q, \dot{q}, t)\, v^\alpha(q) - \delta F(q, t)\,, \tag{4.56}$$

[8] Vorausgesetzt, dass (4.54) für jeden Anfangswert q eine globale Lösung $f(q)$ besitzt.

mit $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}^\alpha$ erhalten, d. h. auf jeder mechanischen Bahn $q(t)$ gilt[9]

$$\frac{d}{dt}\Big(\langle p, v(q)\rangle - \delta F\Big) = 0\,.$$

Bemerkungen:

- Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gibt es einen Erhaltungssatz.
- Der Satz von Noether ist hilfreich, da es oft einfacher ist kontinuierliche Symmetrien zu finden, als Erhaltungsgrößen zu bestimmen.
- Die Umkehrung des Satzes von Noether gilt im Allgemeinen nicht. Nicht zu jeder Erhaltungsgröße gibt es eine kontinuierliche Symmetrie; zum Beispiel wird der LRL-Vektor $\boldsymbol{A}$ durch keinen Fuss erklärt. Dieser Mangel der lagranschen Formulierung wird mit dem Hamiltonformalismus beseitigt, in dem jede Erhaltungsgröße auch einen (kanonischen) Fluss zur Folge hat, siehe Kap. (7.6).
- Der Satz von Noether gilt auch für Flüsse $q_\lambda(t) = \phi_\lambda(q(t), t)$, welche von der Zeit t abhängen.[10] Das Vektorfeld ist dann gegeben durch $v\colon (q,t) \mapsto \partial_\lambda \phi_\lambda\big|_{\lambda=0} \in \mathbb{R}^f$. Der Beweis bleibt unverändert und wir erhalten (4.56) mit dem zeitabhängigen Vektorfeld $v(q,t)$ an Stelle von $v(q)$.

Beweis: Für die Variationsschar $q_\lambda(t)$ um eine beliebige mechanische Bahn $q(t)$ gilt nach Definition

$$\delta q(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} q_\lambda(t)\Big|_{\lambda=0} = v(q(t)).$$

Nach Voraussetzung (4.55) gilt zudem

$$\delta L = \frac{d}{d\lambda} L(q_\lambda, \dot{q}_\lambda, t)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{dt}\delta F(q(t), t).$$

Mit (4.40) folgt damit direkt die Behauptung.

Beispiel 6: Man kann die Erhaltung des verallgemeinerten Impulses, der zu einer zyklischen Koordinate gehört, jetzt einfach aus dem Satz von Noether erhalten. Falls q^α zyklisch ist, so definiert der Fluss

$$[\phi_\lambda(q)]^\beta = q^\beta + \delta^{\beta\alpha}\lambda$$

[9] Die Erhaltungsgröße hängt nur von δF in der Entwicklung von $F_\lambda(q,t) = \delta F(q,t)\lambda + O(\lambda^2)$ ab. In der Tat genügt es, dass in Gl. (4.55) die Terme linearer Ordnung in λ eine totale Zeitableitung sind, damit die Funktion F_λ zu jeder Ordnung λ existiert. Dieses Ergebnis folgt aus der Integraldarstellung $F_\lambda(q,t) = \int_0^\lambda \delta F(q_\mu, t)\, d\mu$ von F_λ.

[10] Um die Gruppeneigenschaft zu erhalten, definiert man den Fluss formal auf dem erweiterten Konfigurationsraum (q,t) durch $\psi_\lambda(q,t) = (\phi_\lambda(q), t)$. Das Vektorfeld ist dann gegeben durch $w(q,t) = \partial_\lambda \psi_\lambda(q,t)|_{\lambda=0} = (v, 0) \in \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}$.

eine kontinuierliche Symmetrie der Lagrangefunktion mit $F \equiv 0$. Das zugehörige Vektorfeld

$$v^\beta = \delta^{\alpha\beta}$$

hat dann nur eine nicht-triviale Komponente. Die Erhaltungsgröße, welche durch (4.56) geliefert wird, ist einfach der konjugierte Impuls p_α.

Beispiel 7: Die Lagrangefunktion

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 - V(|\boldsymbol{x}|)$$

eines Teilchens in 2 Dimensionen mit den Lagekoordinaten[11] $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ ist invariant unter allen Rotationen $R \in \mathrm{SO}(2)$, d. h. $L(\boldsymbol{x}_\lambda, \dot{\boldsymbol{x}}_\lambda) = L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ mit $\boldsymbol{x}_\lambda = \phi_\lambda(\boldsymbol{x}) = R(\lambda)\boldsymbol{x}$ den um den Winkel λ rotierten Koordinaten. Wir bestimmen das dazugehörige Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = R'(\lambda)\boldsymbol{x}\Big|_{\lambda=0} = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{x} = -x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2$$

und die Impulse

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = m\dot{\boldsymbol{x}}.$$

Damit erhalten wir mit dem Satz von Noether die Erhaltungsgröße

$$L_3 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1).$$

Dies entspricht gerade dem Drehimpuls um die 3-Achse. Hätten wir anstelle von $\boldsymbol{x}$ die Polarkoordinaten (r, φ) als Lagekoordinate angenommen, hätten wir festgestellt, dass φ zyklisch ist und damit

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}^2$$

erhalten. Man kann einfach nachrechnen, dass $L_3 = p_\varphi$.

Beispiel 8: Ein Masseteilchen an der Position $x \in \mathbb{R}$ in einem homogenen Schwerefeld hat die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx.$$

Der Fluss (*reine Galileitransformation*)

$$x_\lambda(t) = \phi_\lambda(x(t), t) = x(t) + \lambda t$$

ist eine Symmetrie des Problems, da

$$L(x_\lambda, \dot{x}_\lambda, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \lambda)^2 - mg(x + \lambda t) = L(x, \dot{x}, t) + \frac{d}{dt}F_\lambda(x, t)$$

[11] Man darf natürlich auch die kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{x}$ als verallgemeinerte Koordinaten verwenden.

mit

$$F_\lambda(x,t) = m\lambda\Big(x - \frac{1}{2}gt^2\Big) + \frac{1}{2}m\lambda^2 t.$$

Das zugehörige Vektorfeld ist $v(x,t) = t$ und

$$\delta F = m\Big(x - \frac{1}{2}gt^2\Big).$$

Der Satz von Noether liefert damit die Erhaltungsgröße

$$\beta = m\dot{x}v(x,t) - \delta F = m\Big(\dot{x}t + \frac{1}{2}gt^2 - x\Big). \tag{4.57}$$

Energieerhaltung: Die (verallgemeinerte) Energieerhaltung kann man nicht direkt (aus unserer Form) des noetherschen Satzes herleiten. Die Erhaltung der Energie beruht auf der Tatsache, dass die Lagrangefunktion $L = L(q,\dot{q})$ nicht explizit von der Zeit abhängt (autonomes System). Die Symmetrie, welche der Energieerhaltung zugrunde liegt, ist daher die Zeitverschiebung.

Für den Beweis der Energieerhaltung betrachten wir die Variation $q_\lambda(t) = q(t+\lambda)$ einer mechanischen Bahn $q(t)$ mit $\delta q(t) = \dot{q}(t)$. Nun verlangt Gl. (4.40), dass

$$\frac{d}{dt}\langle p, \dot{q}\rangle = \delta L = \frac{d}{dt}L - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.58}$$

Da L nicht explizit von t abhängt, ist die *verallgemeinerte Energie*

$$E = \langle p, \dot{q}\rangle - L = \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha(q,\dot{q},t)\dot{q}^\alpha - L(q,\dot{q},t) \tag{4.59}$$

entlang jeder mechanischen Bahn erhalten.

Beispiel 9: Falls die Lagrangefunktion gegeben ist durch $L = T(q,\dot{q}) - V(q)$, mit

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta \qquad (g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}) \tag{4.60}$$

gilt

$$\sum_{\alpha=1}^{f}\dot{q}^\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha\,\dot{q}^\beta = 2T\,. \tag{4.61}$$

Solche Systeme treten zum Beispiel auf, wenn die Zwangsbedingungen (4.5) nicht von der Zeit t abhängen, vgl. (4.8) und (4.9). Die Zwangskräfte leisten dann kein Arbeit, da $\dot{x}$ eine virtuelle Verschiebung ist. Da in diesem Fall L nicht explizit von der Zeit abhängt gilt die Erhaltung der Energie in der Form

$$E = T + V\,.$$

Beispiel 2 (Fortsetzung): Ein anderes Beispiel ist das sphärische Pendel. Da die Lagrangefunktion (4.37) nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Energie

$$E = \dot\theta \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} + \dot\varphi \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - L = \frac{l^2}{2}\dot\theta^2 + U(\theta)$$

erhalten mit

$$U(\theta) = \frac{p_\varphi^2}{2l^2 \sin^2\theta} - g\,l\,\cos\theta.$$

Das effektive Potential U setzt sich dabei zusammen aus dem Gravitationspotential und dem Zentrifugalpotential, vgl. (2.11).

Beispiel 4 (Fortsetzung): Als Beispiel betrachten wir ein geladenes Teilchen in einem *statischen* (zeitunabhängigen) Feld. In diesem Fall sind die Maxwellgleichungen

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{x})\,, \qquad \boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\,.$$

Die Lagrangefunktion ist zeitunabhängig und damit ist die Energie erhalten. Der verallgemeinerte Impuls ist gegeben durch

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = m\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}.$$

Beachten Sie, dass in diesem Fall der verallgemeinerte Impuls $\boldsymbol{p}$ nicht mit dem (kinematischen) Impuls $m\dot{\boldsymbol{x}}$ der newtonschen Mechanik übereinstimmt. Damit erhalten wir die Energie

$$E = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^{\,2} + e\varphi(\boldsymbol{x}). \tag{4.62}$$

Der erste Term ist die kinetische Energie und der zweite Term die potentielle Energie im elektrischen Potential φ.

Beispiel 8 (Fortsetzung): Für das Masseteilchen im homogenen Schwerefeld ist die Energie erhalten. Mit Beispiel 9 erhalten wir

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot x^2 + mgx.$$

Wir haben zuvor schon die zusätzliche Erhaltungsgröße β gefunden. Mit diesen beiden Erhaltungsgrößen ist das Problem vollständig integriert.

In der Tat können wir die Gleichung für β nach $\dot x$ auflösen mit dem Resultat

$$\dot x = \frac{1}{t}\Big(x - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{\beta}{m}\Big).$$

Einsetzen in die Gleichung für E liefert dann nach kurzer Rechnung

$$\gamma^2 \equiv \frac{2}{m}(E + g\beta) = \left(\frac{\frac{1}{2}gt^2 + x + \beta/m}{t}\right)^2.$$

Diese Gleichung kann nach x aufgelöst werden mit der Wurfparabel

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + \gamma t - \frac{\beta}{m}$$

als Resultat.

4.6 Die 10 klassischen Erhaltungssätze

Für ein (abgeschlossenes, lagrangesches) System $L = T - V$, dessen Potential V invariant unter Galileitransformationen ist, haben wir bereits in Kapitel 1.4 zehn Erhaltungsgrößen abgeleitet. Wir wollen diese nun mit dem Satz von Noether auf die 10 kontinuierlichen Parametern der Galileigruppe (1.6) zurückführen.

Wegen der Galileiinvarianz ist die Lagrangefunktion eines solchen Systems von der Form

$$L\big(\underbrace{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N}_{=x};\dot{\boldsymbol{x}}_1,\ldots,\dot{\boldsymbol{x}}_N\big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2 - V(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N) \equiv T - V\,, \tag{4.63}$$

mit

$$V(R\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{b},\ldots,R\boldsymbol{x}_N+\boldsymbol{b}) = V(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N)\,, \qquad (R\in \mathrm{SO}(3);\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3),$$

siehe (1.36). Die Impulse sind dann gerade durch

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_i} = m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i \tag{4.64}$$

gegeben.

Wir werden nun die Parameter der Galileigruppe einzeln diskutieren:

(i) **Zeittranslationen:** Wie wir bereits in Beispiel 9 gezeigt haben, ist die erhaltene Größe die Energie $E = T + V$.

(ii) **räumliche Translationen:** L ist invariant unter der gemeinsamen Translation

$$\phi_\lambda(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{x}_1+\lambda\boldsymbol{b},\ldots,\boldsymbol{x}_N+\lambda\boldsymbol{b})$$

um den Vektor $\lambda\boldsymbol{b}$. Das erzeugende Vektorfeld ist gegeben durch $v(x,t) = (\boldsymbol{b},\ldots,\boldsymbol{b})$. Die zugehörige Erhaltungsgröße ist damit

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i\cdot\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{b}\,,$$

d. h. der **Gesamtimpuls** $\boldsymbol{P}$ ist erhalten, da $\boldsymbol{b}$ beliebig ist.

(iii) **Drehungen:** L ist invariant unter den Drehungen

$$\phi_\lambda(\boldsymbol{x}_1,\ldots\boldsymbol{x}_N) = (R(\boldsymbol{e},\lambda)\boldsymbol{x}_1,\ldots,R(\boldsymbol{e},\lambda)\boldsymbol{x}_N)\,,$$

wobei $R(\boldsymbol{e},\lambda)$ die Drehung um die Achse $\boldsymbol{e}$ mit dem Winkel λ ist. Das dazugehörige Vektorfeld $v(x) = (\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{x}_N)$, vgl. (1.39), liefert die Erhaltungsgröße

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i\cdot(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{e}\cdot\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i \equiv \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{L}\,,$$

d. h. der **Gesamtdrehimpuls** $\boldsymbol{L}$ ist erhalten.

(iv) **spezielle Galileitransformationen**: eine *spezielle Galileitransformation* ist eine Transformation in ein gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegtes Koordinatensystem. Dies entspricht dem Fluss

$$\phi_\lambda(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_N, t) = (\boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{v}t, \dots, \boldsymbol{x}_N + \lambda \boldsymbol{v}t).$$

mit dem erzeugenden Vektorfeld $v(x,t) = (\boldsymbol{v}t, \dots, \boldsymbol{v}t)$. Die Lagrangefunktion transformiert sich wie

$$\begin{aligned} L(x_\lambda, \dot{x}_\lambda) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{x}}_i + \lambda \boldsymbol{v})^2 - V(\boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{v}t, \dots, \boldsymbol{x}_N + \lambda \boldsymbol{v}t) \\ &= L(x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{N} m_i\Big(\lambda \dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\lambda^2 \boldsymbol{v}^2\Big). \end{aligned}$$

Damit sind die speziellen Galilietransformationen eine kontinuierliche Symmetrie (4.55) mit

$$F_\lambda(x,t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\Big(\lambda \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\lambda^2 \boldsymbol{v}^2 t\Big)\,, \qquad \delta F(x,t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{v}\,.$$

Die dazugehörige Erhaltungsgröße (4.56) ist

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \boldsymbol{v}t - \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{P}t - M\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{v}\,;$$

d. h. das **Schwerpunktsintegral** $M\boldsymbol{X} - \boldsymbol{P}t$ erhalten.

4.7 Das Prinzip von Euler-Maupertuis

Wir beschränken uns auf autonome Systeme, so dass die Zwangsbedingung (4.5) nicht explizit von der Zeit abhängt und das Potential nur von den Koordinaten abhängt, $V \equiv V(q)$, vgl. Beispiel 9. Mit (4.8) erhalten wir damit die kinetische Energie in der Form

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\,\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\,, \qquad g_{\alpha\beta}(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q^\beta}. \tag{4.65}$$

Die kinetische Energie definiert damit eine (riemannsche) *Metrik* auf dem Konfigurationsraum mit dem *mechanischen Linienelement*

$$ds^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (d\boldsymbol{x}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\, dq^\alpha dq^\beta. \tag{4.66}$$

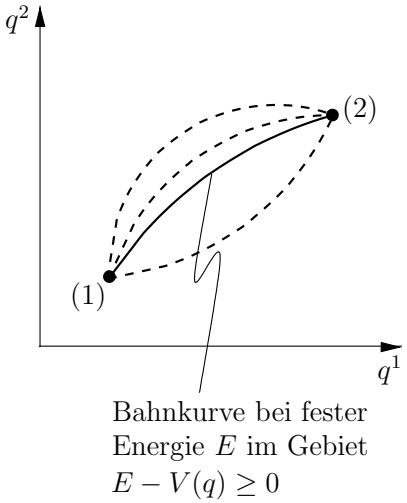


Abbildung 4.6: Variationen der Bahnkurve im Prinzip von Euler-Maupertius. Die Variationen sind bei fester Energie und festgehaltener *Position* des Anfangs- und Endpunkts. Beachten Sie, dass bei fester Energie die *Zeit* des Anfangs- und Endpunktes sich unter einer Variation der Bahnkurve im Allgemeinen natürlich verändern wird.

Damit erhält man direkt, dass die kinetische Energie

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \tag{4.67}$$

einfach dem Quadrat von ds/dt entspricht.

Wir sind interessiert an einem Variationsprinzip für die *Bahnkurve* (geometrische Gestalt der Kurve) ohne Angabe des zeitlichen Ablaufs. Wir benutzen dabei die Energieerhaltung $E = T + V$ und möchten nur Variationen bei *fester Energie* zulassen. Wenn wir die Variationen auf eine feste Energie einschränken, können wir nur die Endpunkte der Bahnkurve nicht aber mehr die Anfangs- und Endzeiten festhalten, siehe Abbildung 4.6. In der Tat gilt das allgemeine Resultat (4.44)

$$\delta S = -E \, \Delta t \Big|_{(1)}^{(2)} \tag{4.68}$$

für jede Variation einer mechanischen Bahn bei fester Energie $E = \langle p, \dot{q} \rangle - L$ und festgehaltenen Endpunkten ($\Delta q^{(i)} = 0$). Diese Tatsache motiviert die Einführung der *verkürzten Wirkung*[12]

$$S_0[q(t)] = S + E(t^{(2)} - t^{(1)}) = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \, (L(q, \dot{q}) + E), \tag{4.69}$$

mit der wir das neue Extremalprinzip $\delta S_0 = 0$ erhalten, da

$$\Delta t \Big|_{(1)}^{(2)} = \delta \int_{(1)}^{(2)} dt.$$

[12] Der Übergang von S auf S_0 entspricht einer Legendretransformation von t auf E, siehe Kap. 8.

Es verbleibt jetzt nur noch eine Methode zu finden, mit der man die Variationen von S_0 bei fester Energie ohne Bezugnahme auf die Zeit (welche sich jetzt ja ändern wird) ausführen kann. Die Idee dazu ist, dass man in (4.69) von der Integration über die Zeit, auf die Integration über das Linienelement ds wechselt. In der Tat finden wir mit $L + E = 2T$ und (4.67), dass

$$(L + E)dt = 2T\frac{dt}{ds}ds = 2\sqrt{T}ds = 2\sqrt{E - V(q)}\, ds. \tag{4.70}$$

Die letzte Form ist dabei unabhängig von der Zeit und wir erhalten das *Prinzip von Euler-Maupertuis*[13]

$$0 = \delta S_0 = \delta \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{E - V(q)}\, ds \tag{4.71}$$

für jede Variation der Bahnkurve bei festen Endpunkten $q^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Bemerkung: Zur Berechnung des Integrals in (4.71) muss man die Bahnkurve $q(\tau)$ parametrisieren mit τ einem *beliebigen* Parameter. Das Prinzip von Euler-Maupertuis besagt dann explizit, dass

$$0 = \delta \int_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} \underbrace{\sqrt{E - V(q(\tau))}\sqrt{T(q(\tau), q'(\tau))}}_{\equiv \tilde{L}(q,q')}\, d\tau, \qquad \text{mit} \quad q' = \frac{dq}{d\tau}\,.$$

Der Integrand ist dann eine (neue) Lagrangefunktion $\tilde{L}(q, q')$ und das Extremalprinzip führt auf die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{\alpha}} = 0$$

vgl. Gl. (4.31).

Beispiel: Als Beispiel betrachten wir den Fall eines freien Teilchens, $V(q) \equiv 0$. Dann lautet das Variationsprinzip (4.71)

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0\,,$$

d. h. die Bahnkurven zu jeder Energie $E > 0$ sind *Geodäten* (bezüglich der mechanischen Metrik (4.66)), d. h. Kurven extremaler Länge.

Eine Illustration dazu liefert ein Teilchen, das reibungsfrei auf einer 2-dimensionalen Fläche im $\mathbb{R}^3$ gleitet. In diesem Fall ist die kinetische Energie gegeben durch

$$T = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

[13] Der konstante Faktor 2 zwischen S_0 und $\int\sqrt{E - V}\, ds$ ist für das Extremalprinzip unerheblich.

wobei $ds^2 = (d\boldsymbol{x})^2$ sich hier auf das *euklidische Längenelement* des $\mathbb{R}^3$ bezieht. Ein Vergleich mit (4.67) zeigt, dass sich das euklidische Längenelement vom mechanischen nur um einen konstanten Faktor unterscheidet. Da dies nur einer anderen Längeneinheit entspricht, ist dieser Unterschied für das Extermalprinzip (4.71) unbedeutend. Wir können daher für ein Teilchen das mechanische durch das euklidische Längenmaß ersetzen. Damit sind die Bahnkurven des Teilchens einfach Geodäten im euklidischen Sinne, z. B. die Großkreise auf der Kugel.

Beziehung zum fermatschen Prinzip: Das Prinzip von Fermat besagt, dass Licht (in der geometrischen Optik) diejenige Bahnkurve nimmt, dessen Laufzeit ein Extremum ist. In einem Medium mit ortsabhängigem *Brechungsindex* $n(\boldsymbol{x})$ wird auch die effektive Lichtgeschwindigkeit $c/n(\boldsymbol{x})$ ortsabhängig. Die Laufzeit entlang einer Bahnkurve ist damit gegeben als

$$\frac{\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(\tau)]}{c} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{n(\boldsymbol{x})}{c}\, ds \tag{4.72}$$

mit $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(\tau)]$ der optischen Weglänge der Bahnkurve $\boldsymbol{x}(\tau)$.[14] Das fermatsche Prinzip besagt daher, dass

$$\delta\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(\tau)] = \delta \int_{(1)}^{(2)} n(\boldsymbol{x})\, ds = 0 \tag{4.73}$$

bei festgehaltenen Endpunkten. Man erkennt nun schön die Analogie zum Prinzip von Euler-Maupertuis (4.71) mit der Identifikation

$$n(\boldsymbol{x}) \propto \sqrt{E - V(\boldsymbol{x})}. \tag{4.74}$$

Um die Variation durchzuführen, parametrisieren wir die Bahnkurve durch einen beliebigen Parameter τ. Dann lautet (4.73)

$$\delta \int_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} \underbrace{n(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}'|}_{L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}\, d\tau = 0,$$

mit $'$ der Ableitung nach τ.

Beispiel: In einem geschichteten Medium mit $n(\boldsymbol{x}) = n(x_3)$ sind x_1, x_2 zyklische Koordinaten. Damit ergeben sich die Erhaltungsgrößen

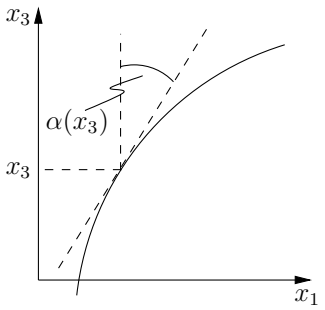
$$\frac{\partial L}{\partial x_i'} = n(x_3)\frac{x_i'}{|\boldsymbol{x}'|} = n(x_3)x_i', \qquad (i = 1, 2),$$

wobei wir im letzten Schritt eine Parametrisierung durch die Bogenlänge mit $d\tau = ds$ gewählt haben, so dass $|\boldsymbol{x}'| = 1$.

[14] Der Parameter τ bezeichnet hier eine beliebige Parametrisierung.

Damit finden wir nun zunächst, dass der Strahl eben ist ($x_2'/x_1' = \text{konst.}$, und damit o. B. d. A. $x_2' = 0$). Führen wir den Winkel $\alpha(x_3)$ zwischen der 3-Achse und der Bahn ein, mit $\sin\alpha(x_3) = x_1'/|\boldsymbol{x}'| = x_1'$, dann folgt zudem das *Brechungsgesetz* von Snellius

$$n(x_3)\,\sin\big(\alpha(x_3)\big) = \text{konst.}$$



Kapitel 5

Schwingungsprobleme

Eine weitere wichtige Klasse von mechanischen Bewegungen sind Schwingungen. In diesem Kapitel wollen wir den Begriff der Eigenschwingung eines konservativ schwingenden Systems und ein ausgewähltes Beispiel (parametrische Resonanz) einer erzwungenen Schwingung untersuchen. Abschließend behandeln wir noch das Problem einer schwingende Saite.

5.1 Konservative schwingende Systeme

Wir betrachten ein System, dessen Lage durch f Koordinaten $(q^1, \dots, q^f) \equiv q \in \mathbb{R}^f$ bestimmt ist. Das System soll eine Energieerhaltung in der Form

$$E = T(\dot{q}) + V(q) \tag{5.1}$$

mit

$$T(q) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}\, q^\alpha q^\beta \qquad \text{und} \qquad V(q) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} k_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta \tag{5.2}$$

quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^f$ aufweisen ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$), wobei T als positiv definit angenommen wird. Wir können die kinetische Energie benutzen, um ein *mechanisches Skalarprodukt*

$$(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta = \frac{1}{2}\big(T(x+y) - T(x) - T(y)\big) \tag{5.3}$$

für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^f$ einzuführen. Es ist einfach nachzuprüfen, dass (x, y) alle Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt. Insbesondere gilt $(q, q) = T(q)$. Damit wird der Raum der Lagekoordinaten $\mathbb{R}^f$ zu einem euklidischen Vektorraum.[1]

[1] Ein euklidischer Vektorraum ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt.

Die Abbildung $\tilde{V} = g^{-1}k$ ist dann eine (bzgl. dem mechanischen Skalarprodukt) symmetrische[2], lineare Abbildung $\tilde{V}\colon \mathbb{R}^f \to \mathbb{R}^f$, so dass die *potentielle Energie* gegeben ist durch

$$V(q) = (q, \tilde{V}q) = (\tilde{V}q, q). \tag{5.4}$$

Die Energieerhaltung verlangt nun, dass

$$0 = \frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}[(\dot{q}, \dot{q}) + (q, \tilde{V}q)] = 2(\dot{q}, \ddot{q} + \tilde{V}q). \tag{5.5}$$

Damit diese Beziehungen für alle $\dot{q}$ gilt, folgen daraus die *Bewegungsgleichungen*[3]

$$\ddot{q} = -\tilde{V}q. \tag{5.6}$$

Als symmetrische Abbildung besitzt $\tilde{V}$ ein vollständiges, orthonormiertes System von Eigenvektoren $e_1, \ldots, e_f \in \mathbb{R}^f$

$$\tilde{V}e_k = \lambda_k e_k, \qquad (e_k, e_l) = \delta_{kl} \tag{5.7}$$

mit $\lambda_k \in \mathbb{R}$. In dieser Basis ist

$$q = \sum_{i=1}^{f} \xi_i e_i \tag{5.8}$$

mit ξ_i den *Normalkoordinaten*. In den Normalkoordinaten reduziert sich die Bewegungsgleichung (5.6) auf (*Eigenschwingungen*)

$$\ddot{\xi}_i = -\omega_i^2 \xi_i, \qquad \omega_i^2 = \lambda_i. \tag{5.9}$$

Das System ist damit äquivalent zu einem System von f *ungekoppelten, harmonischen Oszillatoren* mit den Frequenzen $\omega_1, \ldots, \omega_f$. Die allgemeine Lösung von (5.6) ist damit eine lineare Überlagerung (Superposition)

$$q(t) = \sum_{i=1}^{f} e_i [\underbrace{(e_i, q(0))}_{=\xi_i(0)} \cos(\omega_i t) + \underbrace{(e_i, \dot{q}(0))}_{=\dot{\xi}_i(0)} \frac{1}{\omega_i} \sin(\omega_i t)] \tag{5.10}$$

der f Eigenschwingungen. Falls die Eigenfrequenzen nicht in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, resultiert jedoch im Allgemeinen keine periodische Bewegung.

Ein schwingende System heißt *stabil*, falls *keine* Lösung $q(t)$ für $t \to \infty$ unbeschränkt wächst. Wir sehen sofort, dass das System (5.1) stabil ist, falls $\omega_i^2 > 0$ für alle i, d. h. falls neben T auch V positiv definit ist. Ist V nur positiv semidefinit, so ist mindestens ein $\omega_i = 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$\frac{1}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \xrightarrow{(\omega_i \to 0)} t, \tag{5.11}$$

d. h. in diesem Fall ist das System instabil.

[2] Eine symmetrische Abbildung $\tilde{V}$ erfüllt $(\tilde{V}x, y) = (x, \tilde{V}y)$ für alle $x, y, \in \mathbb{R}^f$.

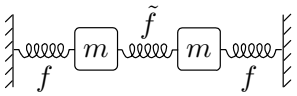
[3] Man erhält die Bewegungsgleichungen natürlich auch als Euler-Lagrange Gleichungen zu $L = T(\dot{q}) - V(q)$.

Bemerkung: Das Problem (5.1) ist wichtig, da es ein allgemeines autonomes, mechanisches System in der Nähe einer Gleichgewichtslage q^* beschreibt; o. B. d. A. setzen wir $q^* = 0$ mit $V(q^*) = 0$. Für die kinetische Energie haben wir in diesem Fall die allgemeine Form (4.60) gefunden. Da wir nur an kleinen Auslenkungen interessiert sind, können wir dabei $g_{\alpha\beta}$ aus (5.2) einfach mit $g_{\alpha\beta}(q^*)$ aus (4.61) identifizieren. Zudem können wir das Potential $V(q)$ um den Gleichgewichtspunkt entwickeln mit dem Resultat

$$V(q) \approx \sum_{\alpha=1}^{f} \overbrace{\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}(q^*)}^{=0,\text{ da Gleichgewicht}} q^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} \frac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}(q^*)\, q^\alpha q^\beta, \tag{5.12}$$

d. h. $V(q)$ ist wie verlangt eine quadratische Form.

Beispiel: Wir betrachten als Beispiel den einfachsten Koppelschwinger aus zwei identischen harmonischen Oszillatoren mit Kreisfrequenz $\Omega = \sqrt{f/m}$, welche durch eine Feder mit einer Federkonstanten $\tilde{f}$ verbunden sind. Die Energie des Systems ist (mit x_1, x_2 der Auslenkung aus der ungespannten Gleichgewichtslage)



$$E = T(\dot{x}) + V(x) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}f(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}\tilde{f}(x_2 - x_1)^2.$$

Es ist einfach nachzuprüfen, dass $V(x) = (x, \tilde{V}x)$ gilt mit der symmetrischen Matrix

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 & -\tilde{\Omega}^2 \\ -\tilde{\Omega}^2 & \Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 \end{pmatrix}$$

und $\tilde{\Omega} = \left(\tilde{f}/m\right)^{1/2}$. Das Eigenwertproblem (5.7) hat die Lösung

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}(1,1), \qquad \omega_1 = \Omega,$$
$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}(1,-1), \qquad \omega_2 = \sqrt{\Omega^2 + 2\tilde{\Omega}^2}.$$

Bei der ersten Eigenschwingung schwingen die zwei Oszillatoren einfach in Phase mit konstantem Abstand, so dass die Kopplungsfeder gar nie gespannt wird. Die Frequenz dieser Schwingung ist natürlich einfach die ursprüngliche Frequenz Ω. Bei der zweiten Eigenschwingung sind die Oszillatoren gegenphasig und schwingen mit gleicher Amplitude. Die entsprechende Frequenz ω_2 ist daher erhöht.

Wir sehen, dass die Eigenschwingungen anschaulich sind, so dass wir sie intuitiv hätten erraten können. Dieses Vorgehen wird erleichtert, indem den Begriff der Symmetrie einführt.

Symmetrien: Eine (diskrete) Symmetrie ist eine lineare Abbildung $S\colon \mathbb{R}^f \to \mathbb{R}^f$, welche T und V invariant lässt; d. h. wir verlangen, dass $T(q) = T(Sq)$ und $V(q) = V(Sq)$ oder (mit dem mechanischen Skalarprodukt geschrieben)

$$(q, q) = (Sq, Sq) \qquad \text{und} \qquad (q, \tilde{V}q) = (Sq, \tilde{V}Sq). \tag{5.13}$$

Die erste Beziehung bedeutet, dass S orthogonal ist (bezüglich dem mechanischen Skalarprodukt).[4] Die zweite Bedingung verlangt damit,[5] dass $S^{-1}\tilde{V}S = \tilde{V}$; d. h. S *kommutiert* mit $\tilde{V}$

$$[S, \tilde{V}] \equiv S\tilde{V} - \tilde{V}S = 0. \tag{5.14}$$

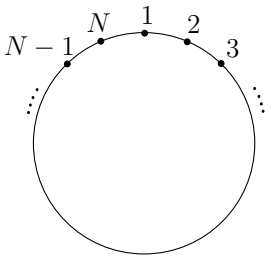
Eine Symmetrie ist dann nützlich, wenn man ihre Eigenräume einfacher bestimmen kann, als die von $\tilde{V}$. Der Grund ist, dass wegen (5.14) die Eigenräume von S invariant unter $\tilde{V}$ sind; d. h.

$$\text{mit} \quad Se_i = \lambda_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad S\tilde{V}e_i = \tilde{V}Se_i = \lambda_i \tilde{V}e_i. \tag{5.15}$$

Es genügt also, das Eigenwertproblem von $\tilde{V}$ in jedem Eigenraum von S („*Symmetriesektor*“) separat zu lösen. Dies führt dann zu einer Reduktion der Dimension des Problems.[6]

Beispiel: *Zyklische Kette*

Wir betrachten ein System von N gleichen Massenpunkten, welche auf einem Kreis angeordnet und mit identischen Federn verbunden sind (Federkonstante f, Grundfrequenz $\Omega = \sqrt{f/m}$). Die Koordinaten $(x_1, \ldots, x_N)$ beschreiben die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage.



Die Bewegungsgleichungen lauten $m\ddot{x}_i = -f[(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})]$, und daher aus (5.6)

$$(\tilde{V}x)_i = \Omega^2(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}), \qquad (N + 1 \equiv 1).$$

Da alle Massenpunkte gleichberechtigt sind, hat das System die Symmetrie

$$S\colon (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_2, \ldots, x_{N+1} \equiv x_1).$$

Das Eigenwertproblem $Sx = \lambda x$ für S ist leicht zu lösen. Wir finden $x_{l+1} = \lambda x_l = \lambda^2 x_{l-1} = \cdots = \lambda^l x_1$. Speziell muss gelten $x_1 = x_{N+1} = \lambda^N x_1$. Die Abbildung S hat damit N Eigenwerte

$$\lambda_k = e^{ik\delta}, \qquad \left(k = 0, \ldots, N-1; \delta = \frac{2\pi}{N}\right)$$

[4] Wegen (5.3) kann man aus $(q, q) = (Sq, Sq)$ folgern, dass $(x, y) = (Sx, Sy)$.
[5] Man beachte, dass $(q, \tilde{V}q) = (Sq, SS^{-1}\tilde{V}Sq) = (q, S^{-1}\tilde{V}Sq)$ gilt für alle q.
[6] Es kann das Problem sogar komplett lösen, wenn alle Eigenräume von S eindimensional sind.

mit den dazugehörigen Eigenvektoren (nicht normiert)

$$\tilde{e}_k = \left(1, e^{ik\delta}, e^{2ik\delta}, \ldots, e^{(N-1)ik\delta}\right).$$

Da die Eigenräume von S eindimensional sind, wird das auf einen Symmetriesektor reduzierte Problem trivial. Wir erhalten sofort $\tilde{V}\tilde{e}_k = \omega_k^2 \tilde{e}_k$ mit

$$\omega_k^2 = \Omega^2(2 - e^{-ik\delta} - e^{ik\delta}) = 2\Omega^2(1 - \cos k\delta) = 4\Omega^2 \sin^2 \frac{k\delta}{2},$$

d. h. die Eigenfrequenzen der zyklischen Kette sind

$$\omega_k = 2\Omega \sin \frac{k\pi}{N}.$$

Wir sehen, dass die Moden k und $k' = N - k$ entartet sind. Die allgemeine Bewegung der Kette ist durch (5.10) gegeben.[7]

Spezielle Eigenmoden sind:

• $k = 0$: mit $\omega_0 = 0, \tilde{e}_0 = (1, \ldots, 1)$. Diese Mode nennt man *Nullmode* und ihre Lösung $\xi_0(t) = \xi_0(0) + \dot{\xi}(0)t$ entspricht einer gleichförmigen Rotation der Kette.

• $k = N/2$ (für N gerade): mit $\omega_{N/2} = 2\Omega$, $\tilde{e}_{N/2} = (1, -1, \ldots, 1, -1)$. Damit schwingen benachbarte Massenpunkte in Gegenphase.

Die anderen Eigenvektoren sind nicht reell. Dabei sind $\tilde{e}_k$ und $\tilde{e}_{-k} \equiv \tilde{e}_{N-k}$ jeweils entartet. Sie entsprechen den entgegengesetzt laufenden Wellen $\mathrm{Re}(\tilde{e}_{\pm k} e^{-i\omega_k t})_j = \cos(kj\delta \mp \omega_k t)$ zu gleicher Frequenz ω_k. Die reellen Eigenvektoren dieser Frequenz sind die stehenden Wellen

$$\frac{1}{2}(\tilde{e}_k + \tilde{e}_{-k}) = (1, \cos k\delta, \ldots, \cos(N-1)k\delta),$$
$$\frac{1}{2i}(\tilde{e}_k - \tilde{e}_{-k}) = (0, \sin k\delta, \ldots, \sin(N-1)k\delta).$$

5.2 Parametrische Resonanz

Neben der Resonanz bei einer erzwungenen Schwingung, wenn die Frequenz des Treibers mit der Eigenfrequenz übereinstimmt, gibt es noch eine andere Art von Resonanzphänomen die sogenannte *parametrische Resonanz*, welche wir in diesem Kapitel behandeln werden. Ein generisches Beispiel ist das Problem eines harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)x, \qquad \omega(t+T) = \omega(t); \tag{5.16}$$

dessen Frequenz periodisch moduliert wird. Beachten Sie, das zu keinem Zeitpunkt eine Kraft auf den Oszillator wirkt. In der Tat ist $x \equiv 0$ immer eine Lösung von (5.16) und die Schwingung wird daher nicht direkt von außen getrieben.

[7] Man sollte natürlich zuerst noch reelle und normierte Eigenvektoren e_k für $\tilde{V}$ aus den entarteten $\tilde{e}_k$, $\tilde{e}_{N-k}$ bilden, siehe auch unten.

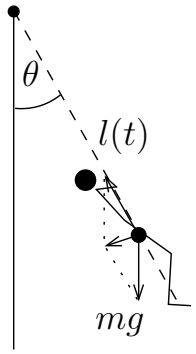


Abbildung 5.1: Eine Person steht auf einer Schaukel (mathematisches Pendel). Sie treibt die Bewegung, indem sie den Schwerpunkt auf und ab bewegt und damit die Distanz $l(t)$ des Aufhängepunktes zum Schwerpunkt periodisch verändert.

Beispiel: Solche Systeme kommen häufig durch Linearisierung um eine periodische Lösung eines nicht linearen Problems zustande (siehe z. B. (3.62)). Gleichung (5.16) beschreibt aber auch das Schaukeln im Stehen, siehe Abbildung 5.1. Der Abstand vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt wird dabei periodisch längs dem Seil verändert mit $l(t) = l(t+T)$. Der Drehimpulssatz (4.32) verlangt, dass

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot\theta) = -mgl\sin\theta\,.$$

Für kleine Auslenkungen ($\theta \ll 1$) folgt daraus

$$\frac{d}{dt}(l^2\dot\theta) = l\frac{d^2}{dt^2}(l\theta) - l\ddot l\theta = -gl\theta$$

und damit

$$\frac{d^2}{dt^2}(l\theta) = -\frac{g-\ddot l}{l}\,(l\theta)\,.$$

Die entspricht mit $\omega^2(t) = (g-\ddot l)/l$ und $x = l\theta$ aber genau der Bewegungsgleichung (5.16) der parametrischen Resonanz.

In einem ersten Schritt schreiben wir die Gleichung (5.16) um in das System

$$\dot z = A(t)z, \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ \dot x \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

von Differentialgleichungen 1. Ordnung; es gilt natürlich $A(t+T) = A(t)$. Sei nun $P(t)$ der Propagator von (5.17) für das Zeitintervall von 0 nach t definiert durch

$$z(t) = P(t)z(0). \tag{5.18}$$

Beispiel: Wir suchen den Propagator von (5.17) für $\omega(t) \equiv \omega$ konstant. Die allgemeine Lösung des harmonischen Oszillatorsproblems ist dann gegeben durch (vgl. (5.10))

$$x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \dot x(0)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

Wir erhalten

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(0)\cos(\omega t) + \dot{x}(0)\omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -x(0)\omega\sin(\omega t) + \dot{x}(0)\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

und damit den Propagator

$$P_\omega(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

eines Oszillators mit konstanter Winkelfrequenz ω.

Die Periodizität von A verlangt, dass

$$P(nT) = P(T)^n\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{5.20}$$

Exponentiell wachsende Lösungen treten also dann auf, wenn $P(T)$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ hat mit $|\lambda| > 1$; umgekehrt sind alle Lösungen beschränkt und das System stabil, falls alle Eigenwerten $|\lambda_k| \leq 1$.

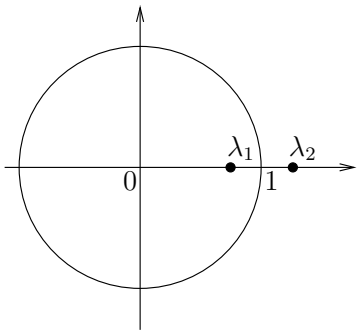
Da die Spur von A verschwindet ($\operatorname{Sp} A(t) = 0$) folgt[8]

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Det} P(t) = \operatorname{Sp}\Big(\underbrace{\frac{dP}{dt}P(t)^{-1}}_{A(t)}\Big)\operatorname{Det} P(t) = 0 \tag{5.21}$$

und daher $\operatorname{Det} P(t) = \operatorname{Det} P(0) = 1$.

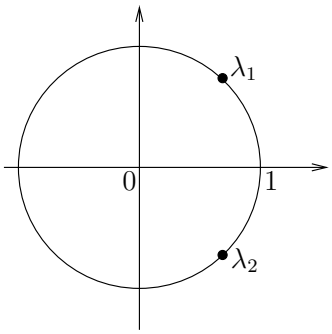
Die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 von $P(T)$ erfüllen damit $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Weiterhin ist $P(T)$ reell, und falls λ_i ein Eigenwert ist, so muss auch λ_i^* ein Eigenwert sein. Man findet damit die zwei Möglichkeiten:

1. $\lambda_i = \lambda_i^*$: λ_i reell



$|\operatorname{Sp} P(T)| = |\lambda_1 + \lambda_2| > 2$

2. $\lambda_1 = \lambda_2^*$: $\lambda_i\lambda_i^* = 1$



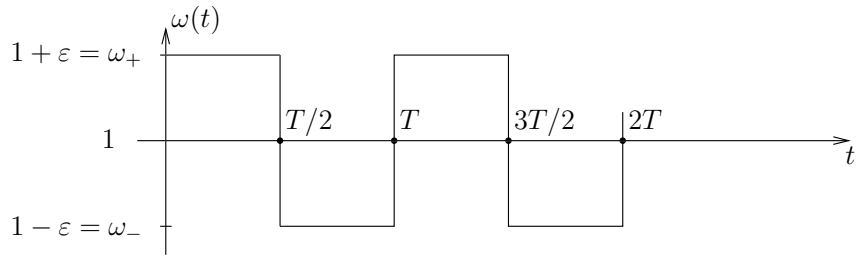
$|\operatorname{Sp} P(T)| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leq 2$

Im ersten Fall ist das System instabil ($|\lambda_2| > 1$), im zweiten Fall stabil ($|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$).[9] Die Stabilität des Systems ist daher durch die Spur von $P(T)$ festgelegt.

[8] Es gilt $\operatorname{Det}(1+\varepsilon A) = 1+\varepsilon\operatorname{Sp}(A)+O(\varepsilon^2)$. Damit folgt (zu erster Ordnung in ΔP) $\operatorname{Det}(P+\Delta P) = \operatorname{Det}(P)\operatorname{Det}(1+\Delta P\,P^{-1}) = \operatorname{Det}(P) + \operatorname{Sp}(\Delta P\,P^{-1})\operatorname{Det}(P)$.

[9] Der Grenzfall $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ist stabil.

Beispiel: Wir untersuchen das System für den einfachen Fall, bei dem $\omega(t)$ einfach durch die Stufenfunktion



zwischen den Werte $\omega_+ = 1+\varepsilon$ und $\omega_- = 1-\varepsilon$ gegeben ist. Der Wert $\omega = 1$ für die ungestörte Schwingung mit $\varepsilon = 0$ entspricht dabei der Wahl der Zeiteinheit: d. h. wir haben die Periode der ungestörten Schwingung auf $T_0 = 2\pi$ gesetzt. Der Parameter ε charakterisiert die Stärke der Störung.

Wegen der Stufenform von $\omega(t)$ erhalten wir direkt

$$P(T) = P_{\omega_-}(T/2)P_{\omega_+}(T/2)$$

für unser Problem mit $P_\omega(t)$ aus (5.19). Für die Stabilitätsanalyse bestimmen wir[10]

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sp} P(T) &= \cos\frac{\omega_+ T}{2}\cos\frac{\omega_- T}{2} - \frac{\omega_+}{\omega_-}\sin\frac{\omega_+ T}{2}\sin\frac{\omega_- T}{2} \\
&\quad + \cos\frac{\omega_+ T}{2}\cos\frac{\omega_- T}{2} - \frac{\omega_-}{\omega_+}\sin\frac{\omega_+ T}{2}\sin\frac{\omega_- T}{2} \\
&= (\cos T + \cos\varepsilon T) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+}\right)}_{=(1+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}(\cos T - \cos\varepsilon T) \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2}\left(\cos T - \varepsilon^2\cos\varepsilon T\right) \\
&= 2 - \frac{4}{1-\varepsilon^2}\left(\sin^2\frac{T}{2} - \varepsilon^2\sin^2\frac{\varepsilon T}{2}\right) \qquad (5.22) \\
\text{oder:}\quad &= -2 + \frac{4}{1-\varepsilon^2}\left(\cos^2\frac{T}{2} - \varepsilon^2\cos^2\frac{\varepsilon T}{2}\right).
\end{aligned}$$

Wir fassen nun T (und damit die Modulationsfrequenz) als variabel auf und suchen zu gegebenem ε die T-Bereiche, in denen das System instabil ist (Reso-

[10] In der zweiten Gleichung benutzen wir die Identitäten $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\,\cos b$ und $\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a\,\sin b$; in der vierten bzw. fünften die Identitäten $\cos(2a) = 1-2\sin^2 a$ und $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$.

nanzbereiche). Es ergeben sich die zwei Möglichkeiten für die Instabilität:

$$\text{(a)} \qquad \mathrm{Sp}\, P(T) > 2: \qquad \sin^2 \frac{T}{2} < \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\varepsilon T}{2}\,, \tag{5.23}$$

$$\text{(b)} \qquad \mathrm{Sp}\, P(T) < -2: \qquad \cos^2 \frac{T}{2} < \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\varepsilon T}{2}\,. \tag{5.24}$$

Wir diskutieren die beiden Fälle für $\varepsilon \ll 1$:

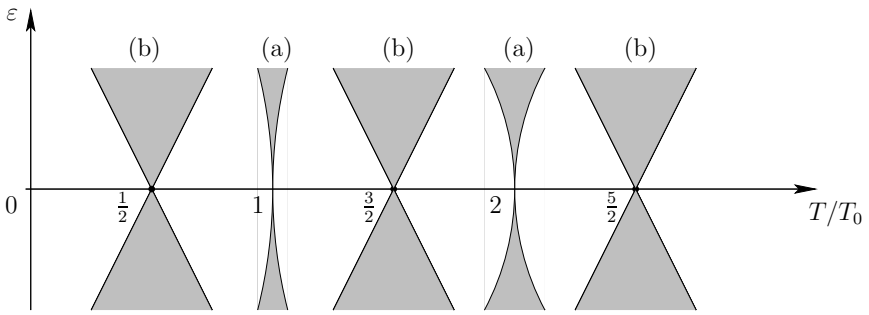
(a) Für $\varepsilon = 0$ ist $\mathrm{Sp}\, P(T) = 2$, falls $T = 2\pi n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Für kleine ε suchen wir Lösungen von (5.23) in der Form $T = 2\pi n + x$ mit $|x| \ll 1$. Näherungsweise gilt für die Resonanzbereiche

$$|x| < 2\pi n \varepsilon^2\,. \tag{5.25}$$

(b) Für $\varepsilon = 0$ ist $\mathrm{Sp}\, P(T) = -2$ falls $T = (2n+1)\,\pi$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Für kleine ε setzen wir $T = (2n+1)\pi + x$, und (5.24) lautet dann

$$|x| < 2\varepsilon\,. \tag{5.26}$$

Im Fall (b) ist die Breite der Resonanzintervalle unabhängig von n und verschwindet wie $O(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$. Im Fall (a) wächst diese Breite bei festem ε proportional zu n und verschwindet wie $O(\varepsilon^2)$. In beliebigen Einheiten ist $T/2\pi = T/T_0$ das Verhältnis der Perioden der Störung und der freien Schwingung. Damit ist das Stabilitätsdiagramm näherungsweise gegeben durch:



Man beachte, dass das Gebiet der Resonanz bei $T = \frac{1}{2}T_0$ größer ist, als wenn man mit der natürlichen Frequenz $(T = T_0)$ treibt. Das heißt es ist besser einen parametrischen Resonator mit dem doppelten seiner Eigenfrequenz als mit seiner natürlichen Frequenz zu treiben.

5.3 Schwingende Saite

Wir modellieren eine Saite durch eine periodische Anordnung identischer Massenpunkte der Masse m an den Orten $x_i = ai$ entlang der 1-Achse $(i \in \mathbb{Z})$, siehe Abbildung 5.2

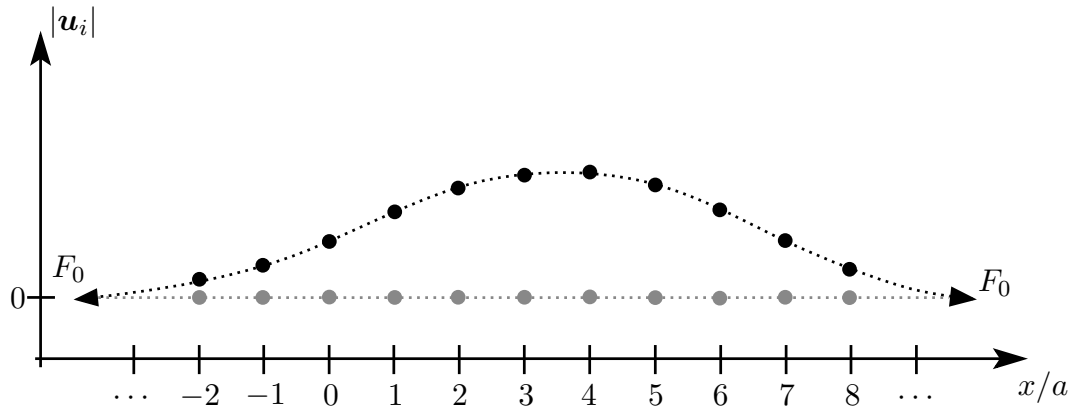


Abbildung 5.2: Modellierung einer Saite als Anordnung von Massenpunkten an jeder Position $x_i = ai$ entlang der 1-Achse. Benachbarte Massenpunkte sind verbunden mit einer Feder mit Federkonstante f. Die Saite ist gespannt mit einer äußeren Kraft $F_0 = af$, welche die korrekte Gleichgewichtslage (grau) garantiert. Der Vektor $\boldsymbol{u}_i$ beschreibt dann die Auslenkung des i-ten Massenpunktes von der Gleichgewichtslage.

Jeweils zwei benachbarte Massenpunkte wechselwirken über eine Federkraft mit der Federkonstanten f miteinander. Wir nehmen an, dass die Saite durch eine äußere Kraft F_0 so gespannt ist, dass sich im Gleichgewicht der gewünschte Abstand $a = F_0/f$ einstellt.

Die potentielle Energie der Federn hat die Form

$$V = \frac{1}{2} f \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\boldsymbol{u}_{i+1} - \boldsymbol{u}_i + a\boldsymbol{e}_1)^2 \tag{5.27}$$

mit den Auslenkungen $\boldsymbol{u}_i$ des i-ten Massenpunktes von der Gleichgewichtslage.

Wir sind interessiert an der Beschreibung von kleinen Auslenkungen. Im Speziellen, wollen wir transversale Auslenkungen betrachten mit $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0$. Damit können wir die potentielle Energie umschreiben als

$$V = V_0 + \frac{1}{2} f \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\boldsymbol{u}_{i+1} - \boldsymbol{u}_i)^2 \tag{5.28}$$

mit V_0 einer (von $\boldsymbol{u}_i$ unabhängigen) Konstanten. Wir erhalten nun direkt die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\boldsymbol{u}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{u}_i} = f(\boldsymbol{u}_{i+1} + \boldsymbol{u}_{i-1} - 2\boldsymbol{u}_i) \tag{5.29}$$

des i-ten Massenpunktes.

Zur realistischen Beschreibung einer Saite, wollen wir nun die Dichte der Massepunkte nach und nach erhöhen; d. h. wir nehmen den *Kontinuumslimes*

$$a \to 0, \quad m \to 0, \qquad \text{mit } \rho = m/a \text{ fest.} \tag{5.30}$$

Wir ersetzen dabei $x_i = ai$ durch die kontinuierliche Koordinate $x \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{u}_i$ wird zur differenzierbaren Funktion $\boldsymbol{u}(x)$. Insbesondere gilt (nach Taylor)

$$\boldsymbol{u}_{i\pm1} \approx \boldsymbol{u}(x) \pm a\boldsymbol{u}'(x) + \frac{1}{2}a^2\boldsymbol{u}''(x). \tag{5.31}$$

Damit erhalten wir den Kontinuumslimes

$$\frac{f}{m}(\boldsymbol{u}_{i+1} + \boldsymbol{u}_{i-1} - 2\boldsymbol{u}_i) \xrightarrow{(a\to 0)} \frac{F_0}{\rho}\boldsymbol{u}''(x). \tag{5.32}$$

Die Bewegungsgleichungen (5.29) gehen im Kontinuumslimes über in die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u}(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{u}(x,t) \tag{5.33}$$

mit $\boldsymbol{u}(x,t)$ der Auslenkung der Saite am Punkt x zur Zeit t und

$$c = \sqrt{\frac{F_0}{\rho}} \tag{5.34}$$

der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung, da der Parameter i, welcher am Anfang die Teilchen durchnummeriert hat, jetzt zu einem weiteren Parameter $x = ai$ der Funktion $\boldsymbol{u}$ geworden ist.

Wir werden uns im Folgenden auf den Fall beschränken, bei dem die Saite nur eine Bewegung in der 13-Ebene ausführt mit $\boldsymbol{u}(x,t) = u(x,t)\boldsymbol{e}_3$. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung hat die Form (*d'Alembert*)

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{5.35}$$

mit $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei beliebigen (zweifach differenzierbaren) Funktionen. Man kann die Lösung durch Einsetzen einfach überprüfen. Hier beschreibt f eine Störung, welche sich nach rechts ausbreitet, deren Form aber invariant bleibt. Analog breitet sich g forminvariant nach links aus. Die allgemeine Lösung ist eine Superposition einer nach rechts und einer nach links laufenden Welle.

Beispiel: *Gitarre*

Für den Fall, dass die Saite an den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist, d. h. $u(0,t) = 0$ und $u(L,t) = 0$ liefert keine der beiden Funktionen eine Lösung des Problems. Der Grund dafür ist, eine rechtslaufende Welle am Punkt $x = L$ reflektiert wird (und sich dabei in eine linkslaufende Welle verwandelt). Die Lösung des Problems ist daher notwendigerweise eine Superposition einer rechtslaufenden und einer linkslaufende Welle, d. h. eine *stehende Welle* der Form

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A\sin(k(x-ct)) + A\sin(k(x+ct)) \\ &= 2A\sin(kx)\cos(kct). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Damit die stehende Welle die Randbedingung bei $x = L$ erfüllt, muss

$$k = k_n = n\frac{\pi}{L}, \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{5.37}$$

gelten. Mit (5.36) schwingt die Saite dann mit der Frequenz

$$\nu_n = \frac{k_n c}{2\pi} = n\frac{c}{2L}, \tag{5.38}$$

d. h. mit der Frequenz $\nu_1 = c/(2L)$ (und deren Obertönen).

Kapitel 6

Starre Körper

Ein starrer Körper ist ein System von Massepunkten, deren Relativabstände zwischen *allen* Punktepaaren während der Bewegung konstant bleiben. Obgleich das eine Idealisierung bedeutet, ist diese Konzeption sehr nützlich, und die Mechanik der Bewegung starrer Körper verdient eine ausführliche Darstellung. Das Beispiel, mit dem wir uns hauptsächlich beschäftigen werden, ist der Kreisel, bei dem ein Punkt des starren Körpers festgehalten wird.

6.1 Massenverteilung und Trägheitstensor

Massenverteilung: Ein starrer Körper wird durch eine *Massenverteilung*

$$dm = \rho(\boldsymbol{y})\, d^3y \tag{6.1}$$

mit der Massendichte $\rho(\boldsymbol{y})$ bezüglich eines *körperfesten* Koordinatensystems $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben. Die allgemeine Konfiguration im *raumfesten* Inertialsystem $\boldsymbol{x}$ ist dann gegeben durch

$$\boldsymbol{x}(t) = R(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t), \qquad t \mapsto R(t) \in \mathrm{SO}(3) \text{ und } t \mapsto \boldsymbol{b}(t) \in \mathbb{R}^3, \tag{6.2}$$

vgl. Abbildung 6.1. Anders als bei einem Massenpunkt ist der Konfigurationsraum 6-dimensional: drei Koordinaten beschreiben die Position $\boldsymbol{b}(t)$ des Bezugspunktes, wobei die zusätzlichen drei Koordinaten $R(t)$ und damit die Ausrichtung des starren Körpers relativ zu einer Standardkonfiguration beschreiben. Oft sind wir an einer Situation interessiert, in der ein Punkt des starren Körpers (nicht notwendigerweise der Schwerpunkt) festgehalten wird. In diesem Fall gibt es nur eine Drehbewegung um diesen festen Punkt, welchen wir auf $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = 0$ setzen, und keine Translation. Ein starrer Körper, bei dem ein Punkt festgehalten wird, nennt man einen *Kreisel*.

Mit der Massenverteilung dm kann man die verschiedenen Größen der Mechanik kompakt schreiben, z. B.

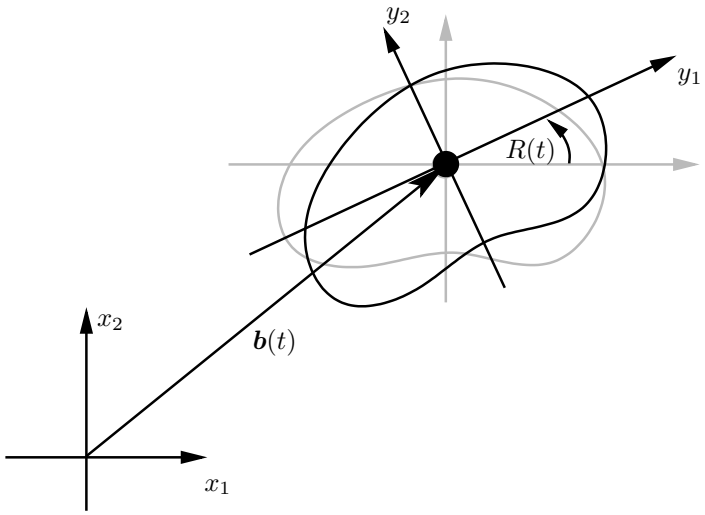


Abbildung 6.1: Die allgemeine Position eines starren Körpers wird beschrieben durch eine Translation um $\boldsymbol{b}(t)$ und eine Rotation $R \in \mathrm{SO}(3)$. Der Konfigurationsraum ist daher 6-dimensional.

- die Gesamtmasse: $M = \int dm$,
- den Schwerpunkt: $\boldsymbol{X} = M^{-1} \int dm\, \boldsymbol{x}$,
- den Drehimpuls: $\boldsymbol{L} = \int dm\, \boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}}$,
- die kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \int dm\, \dot{\boldsymbol{x}}^2$.

Beispiel: (*konzentrierte Massenpunkte*) Man kann den Begriff eines Massenpunktes als Spezialfall der allgemeinen Massenverteilung dm sehen. Dafür führt man den Begriff eines konzentrierten Massenpunktes am Ort $\boldsymbol{y}_0$ von der Masse 1 als $dm = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0) d^3y$ ein (Dirac-Deltafunktion) mit

$$\int dm\, f(\boldsymbol{y}) = \int d^3y\, f(\boldsymbol{y}) \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0) = f(\boldsymbol{y}_0)$$

für eine beliebige Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Damit erhält man für die Massenverteilung

$$dm = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_i)$$

die Resultate aus Kap. 1 für N Massenpunkte. Als Beispiel betrachten wir die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int dm\, \dot{\boldsymbol{x}}^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \int d^3y\, \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_i)\, \dot{\boldsymbol{x}}^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i^2$$

mit $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_i, t) = \boldsymbol{x}_i(t)$ der Position des i-ten Teilchens zum Zeitpunkt t. Der Ausdruck für T stimmt mit (1.33) überein.

Kinetische Energie: Wir können die Beziehung (6.2) dazu verwenden, um die kinetische Energie in körperfesten Koordinaten auszudrücken. Wir erhalten

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int dm\, \dot{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{2}\int dm (\dot{R}\boldsymbol{y} + \dot{\boldsymbol{b}})^2 = \frac{1}{2}\int dm (\dot{\boldsymbol{b}}^2 + \overbrace{\dot{R}\boldsymbol{y}\cdot\dot{R}\boldsymbol{y}}^{=R^t\dot{R}\boldsymbol{y}\cdot R^t\dot{R}\boldsymbol{y}} + 2\dot{R}\boldsymbol{y}\cdot\dot{\boldsymbol{b}}) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{b}}^2 + \frac{1}{2}\int dm\, (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y})^2 + M\dot{R}\boldsymbol{Y}\cdot\dot{\boldsymbol{b}} \end{aligned} \tag{6.3}$$

mit dem Schwerpunkt $\boldsymbol{Y} = R^t(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{b})$ und der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ in y-Koordinaten.[1]

Im Weiteren werden wir das körperfeste Koordinatensystem entweder auf den Schwerpunkt legen (so dass $\boldsymbol{Y} = 0$) oder (im Falle eines Kreisels) auf den festgehaltenen Punkt (so dass $\boldsymbol{b} = 0$). In beiden Fällen verschwindet der letzte Term von (6.3). Damit wird die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{b}}^2 + T_{\text{rot}}$ in die kinetische Energie des Bezugspunktes (als ob die ganze Masse im Bezugspunkt konzentriert wäre) und die *Rotationsenergie*

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}\int dm\, (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y})^2 = \frac{1}{2}\int dm\, \left(\boldsymbol{y}^2\boldsymbol{\omega}^2 - (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\omega})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}\Theta_{ik}\omega_i\omega_k \end{aligned} \tag{6.4}$$

separiert, wobei wir die Koeffizienten des *Trägheitstensors* Θ durch

$$\Theta_{ik} = \int dm\, (\boldsymbol{y}^2\delta_{ik} - y_i y_k) \tag{6.5}$$

definiert haben.

Drehimpuls: Auch für die Berechnung des Drehimpulses betrachten wir wieder die zwei Fälle mit $\boldsymbol{Y} = 0$ oder $\boldsymbol{b} = 0$. Wir erhalten damit aus (6.2) das Resultat

$$\boldsymbol{L} = \int dm\, \boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{x}} = M\boldsymbol{b}\times\dot{\boldsymbol{b}} + \underbrace{\int dm\, R\boldsymbol{y}\times\dot{R}\boldsymbol{y}}_{\equiv R\boldsymbol{S}}, \tag{6.6}$$

wobei der erste Term den Drehimpuls des Bezugspunktes beschreibt. Der zweite Term ist der Drehimpuls bezüglich dieses Punktes (mit $\boldsymbol{y} = 0$). In y-Koordinaten hat er die

[1] Wie schon in Kapitel 1.5 schreiben wir $R^t\dot{R}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{\omega}$ den y-Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit.

Form[2]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \int dm\, \boldsymbol{y} \times R^t \dot{R} \boldsymbol{y} = \int dm \overbrace{\boldsymbol{y} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{y})}^{=\boldsymbol{y}^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{y}} \\ &\equiv \Theta\, \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Mit dem Drehimpulsvektor $\boldsymbol{S}$ können wir die Rotationsenergie umschrieben als

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{S}. \tag{6.8}$$

Trägheitstensor: Die durch (6.7) gegebene Abbildung $\Theta \colon \boldsymbol{\omega} \mapsto \boldsymbol{S}$ ist der *Trägheitstensor* des starren Körpers bezüglich $\boldsymbol{y} = 0$. In Komponenten hat er die Form

$$S_i = \sum_{k=1}^{3} \Theta_{ik} \omega_k \tag{6.9}$$

mit Θ_{ik} aus (6.5). Da die Masseverteilung im y-System fest ist, hängen die Komponenten von Θ_{ik} nicht von der Zeit ab; sie charakterisieren vielmehr eine intrinsische Eigenschaft des starren Körpers. Weiterhin ist die Θ-Matrix symmetrisch, $\Theta_{ik} = \Theta_{ki}$. Der Trägheitsensor Θ besitzt daher drei orthononormierte Eigenvektoren $\boldsymbol{f}_i$ (*Hauptträgheitsachsen*) mit

$$\Theta\, \boldsymbol{f}_i = \theta_i \boldsymbol{f}_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{6.10}$$

Wie aus (6.4) ersichtlich, ist die zu Θ gehörende quadratische Form $2T_{\text{rot}} \geq 0$ und daher positiv-semidefinit. Tatsächlich ist sie positiv-definit, falls die Masseverteilung nicht entartet ist (d. h. nicht auf einer Geraden durch $\boldsymbol{y} = 0$ konzentriert ist). Im Folgenden beschreiben wir das System meist im Hauptachsensystem, in dem

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \theta_2 & \\ & & \theta_3 \end{pmatrix}, \qquad S_i = \theta_i \omega_i, \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \theta_i \omega_i^2 \tag{6.11}$$

gilt mit den *Hauptträgheitsmomenten* $\theta_i > 0$.

6.2 Bewegungsgleichungen

Die 6 Bewegungsgleichungen, welche die Bewegung eines starren Körpers festlegen, sind gegeben durch

$$M \ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F} \qquad \text{(Impulssatz)}, \tag{6.12}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} \qquad \text{(Drehimpulssatz)}, \tag{6.13}$$

[2] Man beachte, dass $R(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = R\boldsymbol{a} \times R\boldsymbol{b}$ für beliebige $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

mit $\boldsymbol{F}$ der Gesamtkraft und $\boldsymbol{M}$ dem Gesamtdrehmoment (bezüglich $\boldsymbol{x} = 0$).

Wegen der Einfachheit des Zusammenhangs von $\boldsymbol{\omega}$ mit $\boldsymbol{S}$ via dem Trägheitstensor im körperfesten System, ist es nützlich den Drehimpulssatz in das körperfeste System zu transformieren. Nach Anwendung von R^t auf den Drehimpulssatz (6.13) unter Ausnutzung von $\dot{\boldsymbol{L}} = M\boldsymbol{b} \times \ddot{\boldsymbol{b}} + \dot{R}\boldsymbol{S} + R\dot{\boldsymbol{S}}$ (aus (6.6)), erhalten wir

$$\dot{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{S} + R^t(\boldsymbol{b} \times M\ddot{\boldsymbol{b}}) = R^t\boldsymbol{M}. \tag{6.14}$$

Diese Bewegungsgleichungen legen zusammen mit dem Impulssatz (6.12) und der Beziehung $\boldsymbol{S} = \Theta\,\boldsymbol{\omega}$ die Bahn fest. Wir wollen die Bewegungsgleichungen in den zwei Fällen noch etwas weiter vereinfachen:

Schwerpunkt als Bezugspunkt ($\boldsymbol{Y} = 0$): In diesem Fall gilt $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{X}$. Dann erhalten wir aus dem Impulssatz die Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{S} = \boldsymbol{N} \tag{6.15}$$

mit $\boldsymbol{N} = R^t(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{F})$ dem Drehmoment bezüglich dem Schwerpunkt in y-Komponenten.

Kreisel ($\boldsymbol{b} = 0$): Im Falles eines Kreisels der am Aufhängepunkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = 0$ festgehalten wird, benötigt man nur den Drehimpulssatz. Der Zusammenhang zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Koordinatensystem ist in diesem Fall gegeben durch $\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{y}$. Die Bewegungsgleichungen reduzieren sich wieder auf (6.15) diesmal mit $\boldsymbol{N} = R^t\boldsymbol{M}$, dem Drehmoment bezüglich dem Aufhängepunkt.

In dem Hauptachsensystem (siehe (6.11)) ergeben sich aus (6.15) in Komponenten die *eulerschen Gleichungen*

$$\begin{aligned} \theta_1\,\dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_2)\,\omega_2\,\omega_3 &= N_1, \\ \theta_2\,\dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3)\,\omega_3\,\omega_1 &= N_2, \\ \theta_3\,\dot{\omega}_3 + (\theta_2 - \theta_1)\,\omega_1\,\omega_2 &= N_3. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Diese Gleichungen definieren ein System nicht-linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Durch $\boldsymbol{\omega}(t)$ ist dann auch $\Omega(t) = R^t\dot{R}$ gegeben,[3] und zur Bestimmung von $R(t)$ verbleibt die lineare Differentialgleichung

$$\dot{R} = R\,\Omega(t) \tag{6.17}$$

zu lösen.

Im Allgemeinen ist die explizite Lösung der Bewegungsgleichung eines starren Körpers schwer. Im Rest des Kapitels wollen wir uns auf die Behandlung von Kreiseln

[3] Wir erinnern nochmals, dass $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} = \Omega\boldsymbol{x}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

beschränken, da für diese nur $R(t)$ nicht aber noch zusätzlich $\boldsymbol{b}(t)$ bestimmt werden muss. Abhängig von den Hauptträgheitsmomenten unterscheiden wir die folgenden Typen von Kreiseln:

alle θ_i verschieden	(unsymmetrischer Kreisel),
$\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$	(symmetrischer Kreisel),
$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$	(Kugelkreisel).

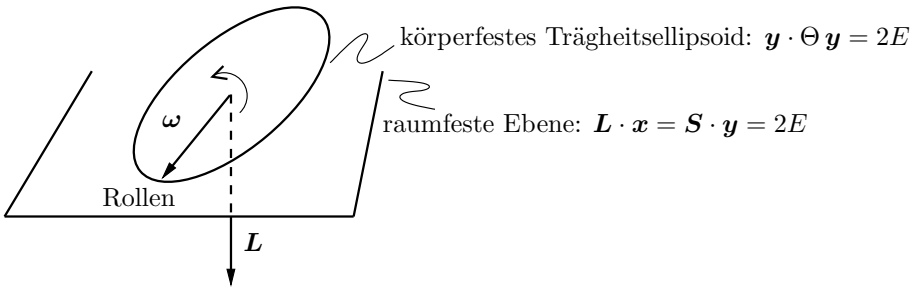
6.3 Der freie Kreisel

Für den *freien Kreisel* gelten die eulerschen Gleichungen mit $\boldsymbol{N} = 0$. Ein Kreisel ist frei, falls entweder keine treibenden Kräfte einwirken oder nur die Gewichtskraft für den Fall dass der Aufhängepunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Da dann $\boldsymbol{b} = 0$ gilt, folgt $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{S}$. Mit der Bewegungsgleichung $\dot{\boldsymbol{S}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{S}$ erhält man

$$\dot{T} = \boldsymbol{\omega} \cdot \Theta\, \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{S}} = 0, \tag{6.18}$$

d. h. die (kinetische) Energie ist erhalten mit $T = E$. Zudem ist natürlich auch $\boldsymbol{L}$ erhalten.

Die Bewegungen des freien Kreisels zur Energie E kann man damit mit der *Konstruktion von Poinsot* geometrisch darstellen:



Die Gleichungen sind per Konstruktion für $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega}$ erfüllt. In der Tat legen sie (für gegebenes R) $\boldsymbol{\omega}$ und damit $\dot{R}$ *eindeutig* fest. Denn sei $\boldsymbol{y}$ ein beliebiger Punkt der raumfesten Ebene. Dann zerlegen wir $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\omega})$, und finden

$$\boldsymbol{y} \cdot \Theta\, \boldsymbol{y} = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \cdot \Theta\, \boldsymbol{\omega}}_{=2E} + 2\underbrace{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\omega}) \cdot \overbrace{\Theta\, \boldsymbol{\omega}}^{=\boldsymbol{S}}}_{=2E-2E=0} + \underbrace{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\omega}) \cdot \Theta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\omega})}_{\geq 0}\,. \tag{6.19}$$

Somit ist $\boldsymbol{y} \cdot \Theta\, \boldsymbol{y} \geq 2E$ und '=' nur für $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega}$.

Die raumfeste Ebene (senkrecht zu $\boldsymbol{L}$) ist daher die Tangentialebene des Trägheitsellipsoids am Punkt $\boldsymbol{\omega}$. Da $\boldsymbol{\omega}$ die instantane Drehachse ist, hat der Berührungspunkt

des Ellipsoids mit der Tangentialebene die Geschwindigkeit Null, d. h. das mit den Hauptträgheitsachsen eines Kreisels verbundene Trägheitsellipsoid *rollt* bei festgehaltenem Mittelpunkt auf der Ebene ab (Drehmoment $\boldsymbol{L}$ fest) ohne zu gleiten. Dabei bewegt sich die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ (Berührungspunkt des Ellipsoids) um $\boldsymbol{L}$ herum.

Eine einfache analytische Behandlung des freien Kreisels ist nur in Spezialfällen möglich. Wir wollen im Folgenden zwei davon beschreiben.

Permanente Rotationen: Eine einfache Lösung existiert, falls der Kreisel um eine seiner Hauptachsen rotiert. Als Beispiel wählen wir

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_0, 0, 0)\,, \tag{6.20}$$

wobei ω_0 konstant ist. Das ist offensichtlich eine Lösung der eulerschen Gleichungen. Um die Stabilität dieser Lösung zu untersuchen, betrachten wir eine Störung $\boldsymbol{\omega} = (\omega_0+\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ indem wir nur lineare Terme in den kleinen Größen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ behalten. In dieser Näherung sind die eulerschen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta_1\dot{\omega}_1 &= 0\,, \\ \theta_2\dot{\omega}_2 &= (\theta_3 - \theta_1)\omega_0\omega_3\,, \\ \theta_3\dot{\omega}_3 &= (\theta_1 - \theta_2)\omega_0\omega_2\,. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Die erste Gleichung besagt, dass ω_1 konstant bleibt, und die beiden weiteren lauten in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2}\omega_0 \\ \frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_3}\omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

Die Eigenwerte $\pm\lambda$ der 2×2-Matrix sind gegeben durch

$$\lambda^2 = \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2\theta_3}\omega_0^2 \tag{6.23}$$

und daher entweder beide reell, oder beide rein imaginär. Der erste Fall (mit $\lambda \neq 0$) tritt ein, falls θ_1 *zwischen* θ_2 und θ_3 liegt, d. h. falls $\theta_2 < \theta_1 < \theta_3$, oder falls $\theta_3 < \theta_1 < \theta_2$. Dann hat (6.22) exponentiell wachsende Lösungen, d. h. die Rotation ist *instabil*. In den übrigen Fällen ist $\lambda^2 < 0$, die Eigenwerte rein imaginär und die Lösungen beschränkt. Dies bedeutet, dass von den drei Hauptachsen nur zwei stabile permanente Rotationen aufweisen, nämlich jene mit dem kleinsten und dem größten Hauptträgheitsmoment.

Dasselbe Resultat folgt auch außerhalb der linearen Näherung: Wie wir oben gesehen

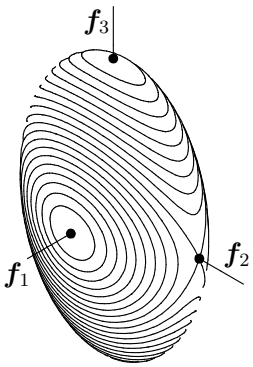


Abbildung 6.2: In dem Diagramm sind die Schnittkurven für den Fall $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ dargestellt.

haben, sind die kinetische Energie T und der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ erhalten, und daher gilt

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \theta_i \omega_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \frac{S_i^2}{\theta_i} \equiv E\,, \tag{6.24}$$

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} S_i^2 \equiv l^2\,. \tag{6.25}$$

Damit liegt $\boldsymbol{S}$ stets auf dem Schnitt eines Ellipsoids (mit den Halbachsen $\sqrt{2E\theta_i}$) und einer Kugel vom Radius l, siehe Abbildung 6.2. Die Schnittkurven für $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ in der Nähe der Hauptachsen $\boldsymbol{f}_1$ und $\boldsymbol{f}_3$ sind kleine geschlossene Kurven, d. h. $\boldsymbol{S}$ (und damit $\boldsymbol{\omega}$) bleibt in deren Nähe. Nicht in der Nähe von $\boldsymbol{f}_2$.

Der symmetrische freie Kreisel: In dem besonderen Fall eines symmetrischen Körpers ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid, d. h. zwei der drei Hauptträgheitsmomente sind gleich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\theta_1 = \theta_2$ und damit ist $\boldsymbol{f}_3$ die *Figurenachse*. Die eulerschen Gleichungen vereinfachen sich dann zu

$$\begin{aligned} \dot\omega_1 &= -\alpha\,\omega_2\,, \\ \dot\omega_2 &= \alpha\,\omega_1\,, \\ \dot\omega_3 &= 0\,. \end{aligned} \qquad \left(\alpha = \frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_1}\omega_3\right), \tag{6.26}$$

Die letzte Gleichung verlangt, dass ω_3 konstant ist. Damit ist auch α konstant. Die Lösung der Differentialgleichung für ω_1 und ω_2 ist dann gegeben durch

$$\omega_1(t) + i\omega_2(t) = (\omega_1(0) + i\omega_2(0))e^{i\alpha t}\,. \tag{6.27}$$

Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ dreht sich also um die Figurenachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit α. Die Bewegung $R(t)$ ergibt sich als Spezialfall des nächsten Abschnitts oder mit der Konstruktion von Poinsot: Man sieht einfach, dass beim symmetrischen Kreisel der Drehimpuls $\boldsymbol{S}$, die Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ und die Figurenachse $\boldsymbol{f}_3$ immer in einer Ebene liegen.[4]

[4] In köperfesten Koordinaten gilt $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{f}_3 = (\omega_2, -\omega_1, 0)$, $\boldsymbol{S} = (\theta_1\omega_1, \theta_1\omega_2, \theta_3\omega_3)$ und damit $\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{f}_3) = 0$.

Wenn sich nun die Drehachse um die Figurenachse mit Winkelgeschwindigkeit α bewegt, bedingt das in raumfesten Koordinaten, dass sich sowohl die Figurenachse, als auch die Drehachse um den raumfesten Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ mit der Winkelgeschwindigkeit α bewegen. Man sagt, die Figurenachse *präzessiert*.

Beispiel (Eulersche Theorie der Polschwankungen)

Der kinematische Nordpol (Richtung der instantanen Drehachse $\boldsymbol{\omega}$) der Erde rotiert um den geometrischen Nordpol (Figurenachse). Die äußeren auf die Erde wirkenden Drehmomente sind so schwach, dass die Rotationsbewegung als kräftefrei angesehen werden kann. Die Erde ist symmetrisch um die Polachse und an den Polen leicht abgeplattet, so dass θ_1 kleiner ist als θ_3. Konkret ist das numerische Verhältnis der Trägheitsmomente gegeben durch

$$\frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1} = -0{,}0033\,. \tag{6.28}$$

Die Periode der Präzessionsbewegung ist daher

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_3}}_{=1\text{Tag}} \underbrace{\frac{\theta_1}{\theta_3 - \theta_1}}_{\approx 300} \approx 300 \text{ Tage}\,. \tag{6.29}$$

Daraus folgt, dass die Rotationsachse der Erde im Lauf von 10 Monaten einen Kreis um den Nordpol beschreibt. Eine (allerdings unregelmäßige) Bewegung dieser Art wurde beobachtet. Die Amplitude der Präzession ist sehr klein, die Drehachse wandert niemals mehr als etwa 4,5 m vom Nordpol weg. Die Bahn ist aber völlig unregelmäßig, und die Grundperiode scheint annähernd 427 Tage (und nicht 300 Tage) zu sein. Die Fluktuationen werden kleinen Verschiebungen der Masseverteilung auf der Erde zugeschrieben, wie sie etwa durch atmosphärische Bewegungen hervorgerufen werden, während der Unterschied in der Periode von der Tatsache herrührt, dass die Erde nicht vollständig starr ist, sondern die elastischen Eigenschaften eines Materials wie Stahl hat.[5]

6.4 Der schwere symmetrische Kreisel

Das andere wichtige Beispiel ist der Kreisel in einem homogenen Schwerefeld. Im folgenden betrachten wir den Fall des symmetrischen Kreisels, d. h. wir nehmen

[5] Die kräftefreie Präzession der Erdachse darf nicht mit ihrer langsamen Präzession um die Normale zur Ekliptik verwechselt werden. Diese astronomische Präzession rührt von Graviationskräften der Sonne und des Mondes her, die in der obigen Diskussion als vernachlässigbar angesehen wurden. Diese Annahme ist berechtigt, da die Periode der astronomischen Präzession sehr groß (26'000 Jahre) ist.

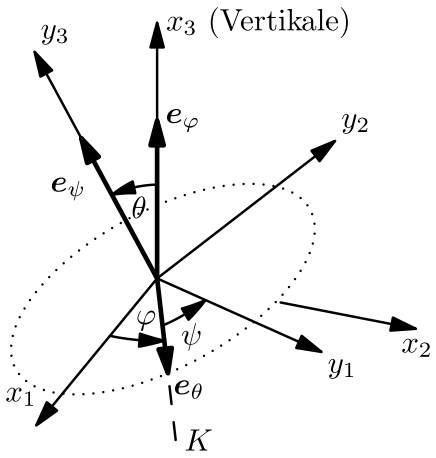


Abbildung 6.3: Koordinatensystem zur Beschreibung des schweren symmetrischen Kreisels: Der Winkel θ gibt die Neigung des Kreisels an. Man nennt θ auch den „Nutationswinkel“. Der Winkel φ wird „Präzessionswinkel“ genannt. Er gibt die Orientierung der auf den „Boden“ projizierten Kreiselachse (der Knotenlinie K) an. Der Winkel ψ ist der „Eigenrotationswinkel“.

wiederum an, dass $\theta_1 = \theta_2$. Aus Symmetriegründen liegt dann der Schwerpunkt auf der Figurenachse. Im körperfesten Koordinatensystem hat er deshalb die Komponenten

$$\boldsymbol{y}_S = (0, 0, l)\,, \qquad l > 0\,. \tag{6.30}$$

Wir wählen das raumfeste x-System so, dass die x_3-Achse vertikal nach oben zeigt. Als Lagekoordinaten benutzen wir *die eulerschen Winkel* (φ, θ, ψ), vgl. Abbildung 6.3. Das körperfeste y-System (mit den Basisvektoren $\boldsymbol{f}_i$) geht dabei aus dem raumfesten x-System (mit den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i$) durch die folgende Abfolge von 3 Drehungen[6]

$$R = R_1(\varphi) R_2(\theta) R_3(\psi)$$

hervor mit:

Drehung	Drehachse	Drehwinkel	
1.	x_3	φ	($\boldsymbol{e}_1$ geht über auf die Knotenlinie)
2.	K	θ	($\boldsymbol{e}_3$ geht auf $\boldsymbol{f}_3$)
3.	y_3	ψ	

wobei die „Knotenlinie“ K das Bild der x_1-Achse unter der 1. Drehung ist. Die entsprechende Karte von SO(3) ist das Gebiet

$$\{0 < \theta < \pi; 0 < \varphi, \psi < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^3\,. \tag{6.31}$$

Man nennt die drei Eulerwinkel auch Präzessionswinkel (φ), Nutationswinkel (θ) und Eigenrotationswinkel (ψ).

Die Drehachsen sind gegeben durch die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\psi$. Im körperfesten Koordinatensystem ist $\boldsymbol{e}_\psi = \boldsymbol{f}_3$ gerade der Einheitsvektor in die y_3-Richtung. Die

[6]Wir beschreiben die Rotationen als Transformation vom x- zum y-System. Die Reihenfolge der Rotation ist dabei gerade umkehrt, wie in der Definition $\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{y}$. Die Reihenfolge der Eulerwinkel ist so gewählt, da typischerweise $\dot\psi > \dot\theta > \dot\varphi$ ist.

anderen beiden Rotationsachsen sind etwas komplizierter. Aber man findet leicht geometrisch, dass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\theta &= \cos\psi\, \boldsymbol{f}_1 - \sin\psi\, \boldsymbol{f}_2\,, \\ \boldsymbol{e}_\varphi &= \sin\theta(\sin\psi\, \boldsymbol{f}_1 + \cos\psi\, \boldsymbol{f}_2) + \cos\theta\, \boldsymbol{f}_3 \end{aligned} \tag{6.32}$$

mit $\boldsymbol{f}_i$ den Einheitsvektoren entlang den y_i-Achsen.

Die Winkelgeschwindigkeit (in körperfesten Komponenten) ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi + \dot\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + \dot\psi\, \boldsymbol{e}_\psi\,, \\ &= \left(\dot\varphi\, \sin\theta\sin\psi + \dot\theta\, \cos\psi, \dot\varphi\, \sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi, \dot\varphi\, \cos\theta + \dot\psi\right)\,. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Die kinetische Energie

$$T = \frac{\theta_1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\theta_3}{2}\omega_3^2 \tag{6.34}$$

berechnet sich daher zu

$$T = \frac{\theta_1}{2}\left(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{\theta_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2\,. \tag{6.35}$$

Der Schwerpunkt hat im raumfesten Koordinatensystem die Form

$$\boldsymbol{x}_S = (*, *, l\cos\theta)\,. \tag{6.36}$$

Dies führt auf die Lagrangefunktion

$$L = T - V\,, \tag{6.37}$$

mit

$$V = mgl\cos\theta\,. \tag{6.38}$$

Erhaltungssätze: Da L nicht von t, φ und ψ abhängt, besitzt das System die drei Erhaltungsgrößen:

$$T + V = E\,, \tag{6.39}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi\,\theta_1 \sin^2\theta + (\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\,\theta_3\cos\theta \equiv L_3\,, \tag{6.40}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = (\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\,\theta_3 \equiv S_3\,. \tag{6.41}$$

Wir bezeichnen die entsprechenden konstanten Werte mit E, L_3 und S_3. Dabei sind L_3 und S_3 die Projektionen des Drehimpulses auf $\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_3$ (Vertikale) bzw. auf $\boldsymbol{e}_\psi = \boldsymbol{f}_3$ (Figurenachse). Aus $\boldsymbol{S} = \Theta\,\boldsymbol{\omega}$ folgt nämlich direkt

$$p_\varphi = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\,, \qquad p_\psi = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_\psi\,. \tag{6.42}$$

Die Erhaltung von $T + V$ und p_φ gilt auch allgemeiner, falls der Kreisel nicht symmetrisch ist; p_ψ ist hingegen nur für symmetrische Kreisel erhalten.

Integration der Bewegungsgleichungen: Aus (6.40) und (6.41) folgt

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \frac{S_3}{\theta_3}\,, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L_3 - S_3\cos\theta}{\theta_1 \sin^2\theta}\,. \tag{6.43}$$

Einsetzen in (6.39) liefert

$$E' \equiv E - \frac{S_3^2}{2\theta_3} = \frac{\theta_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(L_3 - S_3\cos\theta)^2}{2\theta_1 \sin^2\theta} + mgl\cos\theta\,. \tag{6.44}$$

Dies ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die *Nutationsbewegung* $\theta(t)$. Um sie zu lösen, führen wir die Variable $u = \cos\theta$ ein. Mit $\dot{u} = -\sin\theta\,\dot{\theta}$ findet man dann

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2 \equiv f(u)\,, \tag{6.45}$$

wobei die Konstanten α, β, a und b durch

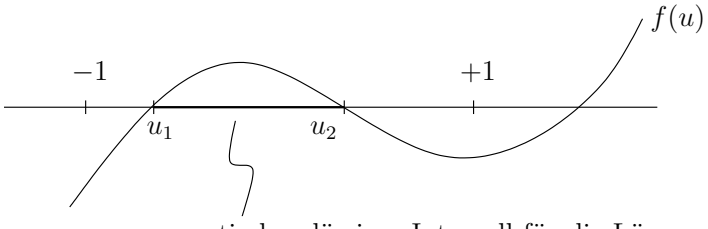
$$\alpha = \frac{2E'}{\theta_1}\,, \qquad \beta = \frac{2mgl}{\theta_1} > 0\,, \qquad a = \frac{L_3}{\theta_1}\,, \qquad b = \frac{S_3}{\theta_1} \tag{6.46}$$

gegeben sind. Man beachte, dass u nur für $-1 \le u \le 1$ definiert ist. Da die linke Seite nicht-negativ ist, $\dot{u}^2 \ge 0$, ist die allgemeine Lösung beschränkt auf das Gebiet, für das $f(u) \ge 0$; dort lautet sie

$$t(u) - t(v) = \int_v^u \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}\,. \tag{6.47}$$

Die Funktion $f(u)$ ist ein Polynom 3. Grades. Die Nullstellen dieses kubischen Polynoms entsprechen den Winkeln, für die $\dot{\theta}$ sein Vorzeichen ändert, d. h. den Umkehrwinkeln von θ. Für große u ist βu^3 der dominierende Term; da $\beta > 0$, ist daher $f(u)$ positiv für große positive u, und negativ für große negative u.

An den Punkten $u = \pm 1$ wird $f(u) = -(a \mp b)^2$, und ist deshalb immer negativ (wir behandeln den allgemeinen Fall $b \neq \pm a$)[7]. Demnach muss mindestens eine der Nullstellen in dem Gebiet $u > 1$ liegen, was keinem physikalischen Winkel entspricht. Wegen (6.45) gilt $f(u) \ge 0$ irgendwo im physikalischen Bereich ($|u| \le 1$). Für einen Kreisel muss also $f(u)$ zwei Nullstellen $u_1 \le u_2$ haben, die im Intervall $[-1, 1]$ liegen mit dem allgemeinen Verlauf



energetisch zulässiges Intervall für die Lösung $u(t)$

[7] Die Grenzfälle entsprechen dem stehenden Kreisel ($b = a$, $S_3 = L_3$) und dem hängenden Kreisel ($b = -a$, $S_3 = -L_3$).

von $f(u)$. Die Punkte u_1 und u_2 sind die Umkehrpunkte der Nutationsbewegung. Diese ist periodisch mit der Periode

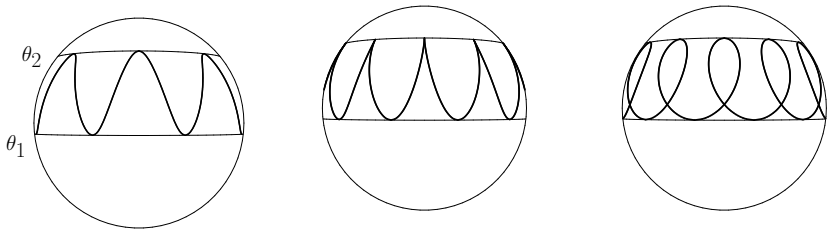
$$T = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}\,. \tag{6.48}$$

Mit Hilfe von (6.43) kann man aus einer Lösung für $u(t) = \cos\theta(t)$ dann auch $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ bestimmen. Insbesondere gilt

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}\,, \tag{6.49}$$

und daher hat $\dot{\varphi}(t)$ *dieselbe* Periode T. Andererseits beschreibt $\varphi(t)$ die Präzession der Figurenachse um die Vertikale. Durch Integration von (6.49) finden wir, dass diese Präzession die Summe einer linearen Funktion in t (mittlere Präzession) und einer periodischen Funktion der Periode T ist.

Es ist üblich, die Bewegung des Kreisels dadurch zu beschreiben, dass man die Schnittkurve der Figurenachse auf einer Kugel mit Einheitsradius um den Aufhängepunkt aufträgt. Diese Kurve wird der *Locus* der Figurenachse genannt. Die Kugelkoordinaten eines Punktes auf dem Locus im raumfesten System sind identisch mit den eulerschen Winkeln θ und φ.[8] Der dritte Winkel, ψ, beschreibt nur die Rotation des Kreisels um seine eigene Symmetrieachse. Wie wir oben gesehen haben, verläuft der Locus zwischen den zwei Grenzkreisen $\theta_1 = \arccos u_1$ und $\theta_2 = \arccos u_2$, wobei $\dot{\theta}$ auf beiden Kreisen verschwindet. Die Gestalt der Locuskurve ist in großem Maße durch den Wert der Nullstelle $u_0 \equiv a/b$ von $a - bu$ bestimmt. Man kann zeigen, dass $u_0 > u_1$. Aus (6.49) erhalten wir das Resultat, dass die Präzessionsbewegung die Richtung ändert für $u > u_0 = a/b$. Damit erhalten wir die folgenden Locuskurven:



$a/b > u_2$ $\qquad$ $a/b = u_2$ $\qquad$ $u_1 < a/b < u_2$

Im ersten Fall ist $\dot{\varphi} > 0$ für alle Zeiten. Die Figurenachse führt damit eine *Präzession* um die Vertikale aus während θ eine *Nutation* zwischen den Grenzkreisen ausführt. Der zweite Fall mit $a/b = u_2$ ist nicht so außergewöhnlich, wie man vielleicht zunächst glaubt. Er entspricht den Anfangsbedingungen $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ (Loslassen des Kreisels ohne Anfangspräzession der Figurenachse). Dann gilt $u(0) = u_0 = a/b$ (wegen $\dot{\varphi}(0) = 0$) und $f(u_0) = 0$ (wegen $\dot{\theta}(0) = 0$). In diesem Fall „fällt“ der Kreisel von θ_2 bis

[8] Der Winkel φ wird unkonventionell von der $(-x_2)$-Achse aus gemessen.

nach θ_1 und richtet sich dann wieder auf. Im letzten Fall ändert $\dot{\varphi}$ beim Grenzkreis $\theta_0 = \arccos u_0$ das Vorzeichen. Für $\theta_1 \leq \theta < \theta_0$ findet die normale Präzession statt, während die Präzession bei stärker aufgestelltem Kreisel (mit $\theta_0 < \theta \leq \theta_2$) rückwärts verläuft.

6.4.1 Beispiele

Reine Präzession: Wir erhalten eine *reine Präzession* als Spezialfall, falls $u_1 = u_2 \equiv \bar{u}$. Dann ist $\dot{\varphi}$ konstant und $f(u)$ hat eine Nullstelle 2. Ordnung bei $\bar{u}$, d. h. $f(\bar{u}) = f'(\bar{u}) = 0$.

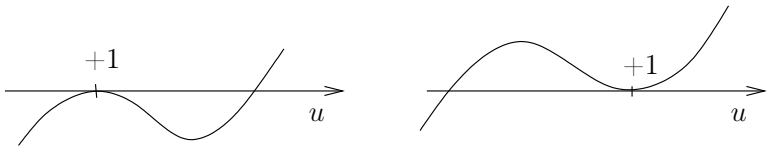
Stehender Kreisel: Wir betrachten die Stabilität des *senkrecht stehenden Kreisels* mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Dann ist anfänglich $\theta = \dot{\theta} = 0$ und damit $L_3 = S_3 = \theta_3\omega$, $E' = mgl$. Wir erhalten

$$\alpha = \beta = \frac{2mgl}{\theta_1}, \qquad a = b = \frac{\theta_3\omega}{\theta_1}.$$

Damit hat

$$f(u) = (1-u)^2[\alpha(1+u) - a^2]$$

eine Nullstelle 2. Ordnung bei $u = 1$ und somit ist $\theta = 0$ ein Gleichgewichtspunkt. Für die Stabilität dieser Bewegung betrachten wir den Verlauf von f. Je nach Vorzeichen von $[\cdots]_{u=1} = 2\alpha - a^2$ erhalten wir



$2\alpha < a^2$
d. h. $\omega^2 > 4\theta_1 mgl/\theta_3^2$
(stabil)

$2\alpha > a^2$
d. h. $\omega^2 < 4\theta_1 mgl/\theta_3^2$
(instabil)

als möglichen Verlauf.

Der erste Fall entspricht einem *schnellen Kreisel* mit $|\omega| > \omega_c \equiv 2\sqrt{\theta_1 mgl}/\theta_3$ und $u = 1$, $\theta = 0$ als einzige physikalischer Lösung. Die stehende Position ist damit stabil und der Kreisel *schläft*. Im zweiten Fall ($|\omega| < \omega_c$) ist die Gleichgewichtslösung $\theta = 0$ instabil, da links von $u = 1$ ein energetisch erlaubtes Intervall anschließt. Der senkrecht aufgesetzte Spielkreisel beginnt zu wackeln, sobald $|\omega|$ durch Reibungsverluste unter die Stabilitätsgrenze ω_c sinkt. Damit *erwacht* der schlafende Kreisel nach einer gewissen Zeit und beginnt zu taumeln.

Kapitel 7

Hamiltonsche Systeme

Für verschiedene Aspekte der Mechanik (und vor allem auch für die Quantenmechanik und die statistische Mechanik) ist die hamiltonsche Beschreibung der Mechanik wichtig. Die Grundidee ist dabei, dass man zur Beschreibung des Systems nicht die Lagekoordinaten und ihre Geschwindigkeiten benutzt, sondern die Geschwindigkeiten durch die konjugierten Impulse ersetzt. Dieses Vorgehen soll nun im Detail erklärt werden.

7.1 Hamiltonfunktion

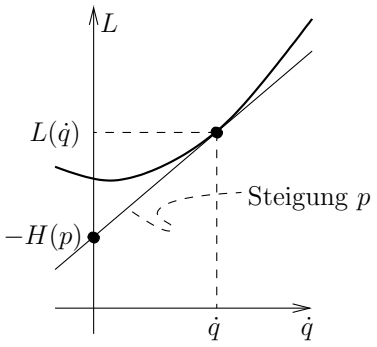
Gegeben sei ein lagrangesches System, für das die Lagrangefunktion L von den Lagekoordinaten q^α, ihren Geschwindigkeiten $\dot{q}^\alpha$ sowie gegebenenfalls der Zeit t abhängt, $L \equiv L(q, \dot{q}, t)$. Die (kanonisch) konjugierten Impulse sind durch

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \equiv p_\alpha(q, \dot{q}, t) \ , \qquad (\alpha = 1, \ldots, f) \tag{7.1}$$

definiert. Wie wir später sehen werden, lässt sich die Bewegung eines mechanischen Systems oft natürlicher im *Phasenraum* beschreiben, dessen Koordinaten die Lagekoordinaten q^α sowie die zugehörigen Impulse p_α sind. Um zu dieser Beschreibung zu gelangen, müssen wir also die Geschwindigkeiten $\dot{q}^\alpha$ durch p_α ausdrücken.

Die *Hamiltonfunktion* $H(q, p, t)$ geht aus aus der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ durch eine Berührungs- (oder Legendre-) Transformation bei festem (q, t) hervor. Dabei wird die Variable $\dot{q}$ ersetzt durch p via:

Geometrisch:



Analytisch:

Man löst (7.1) nach

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p, t) \tag{7.2}$$

auf und setzt dies in

$$\langle p, \dot{q}\rangle - L = \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, \dot{q}^\alpha - L(q, \dot{q}, t) \equiv H(q, p, t) \tag{7.3}$$

ein (vgl. (4.59)).

Wir möchten den Zusammenhang der partiellen Ableitungen von H mit denen von L bestimmen. Wir erhalten direkt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} &= \dot{q}^\alpha + \sum_{\beta=1}^{f} \left(p_\beta - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} \right) \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial p_\alpha} = \dot{q}^\alpha \\
\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} &= \sum_{\beta=1}^{f} \left(p_\beta - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} \right) \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \\
\frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

da $\partial L / \partial \dot{q}^\beta = p_\beta$.

7.2 Die kanonischen Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für die Phasenraumkoordinaten (q, p) können nun leicht aus den Euler-Lagrange Gleichungen $\dot{p}_\alpha = \partial L / \partial q^\alpha$ abgeleitet werden. Die resultierenden hamiltonschen (*kanonischen*) Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \,, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \,, \qquad (\alpha = 1, \ldots f) \,. \tag{7.5}$$

Dies sind $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2f$ unbekannten Funktionen $q^1(t), \ldots q^f(t)$, $p_1(t), \ldots p_f(t)$.

Beispiele:

(i) Massenpunkt im äußeren Potential $V(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2} \dot{\boldsymbol{x}}^2 - V(\boldsymbol{x}) \,, \qquad \boldsymbol{p} = m \dot{\boldsymbol{x}} \,, \\
H &= \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}) \,.
\end{aligned}$$

(ii) Dasselbe System in Polarkoordinaten

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)\,, \qquad p_r = m\dot{r}\,, \qquad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\,,$$
$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + r^{-2}p_\varphi^2) + V(r)\,.$$

(iii) Der allgemeine autonome Fall (vgl. Beispiel 9 aus Kapitel 4.5.3)

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - V(q)\,, \qquad p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\beta\,,$$
$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} g^{\alpha\beta}(q)p_\alpha p_\beta + V(q)\,,$$

wobei $(g^{\alpha\beta}(q))_{\alpha,\beta=1,\dots,f}$ die Inverse der Matrix $(g_{\alpha\beta}(q))_{\alpha,\beta=1,\dots,f}$ ist.

(iv) Geladenes Teilchen in einem äußeren elektromagnetischen Feld:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 - e\Big(\varphi(\boldsymbol{x},t) - \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\Big)\,, \qquad \boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\,,$$
$$H = \frac{1}{2m}\Big(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\Big)^2 + e\varphi(\boldsymbol{x},t)\,.$$

Da die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist in diesen Fällen die Hamiltonfunktion einfach die verallgemeinerte Energie, vgl. (4.59). Es ist jedoch darauch zu achten, dass H eine Funktion von (q,p,t) ist, d. h. $\dot{q}$ muss durch p ausgedrückt werden.

7.3 Phasenraum und Poissonklammern

Wir bezeichnen die $2f$ Variablen

$$x \equiv (x_1,\dots,x_{2f}) \equiv (q^1,p_1,\dots,q^f,p_f) \tag{7.6}$$

als die *Phasenkoordinaten* des Systems, und den zugehörigen Raum als den *Phasenraum*. Ist der Konfigurationsraum $\mathbb{R}^f$, so ist der Phasenraum einfach $\mathbb{R}^{2f}$. Die kanonischen Gleichungen (7.5) lauten in dieser Notation

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f}\varepsilon_{ik}\frac{\partial H}{\partial x_k}\,, \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Die Matrix ε hat die wichtigen Eigenschaften $\varepsilon^t = \varepsilon^{-1} = -\varepsilon$.

Sei nun $F(q,p) = F(x)$ eine beliebige Funktion auf dem Phasenraum. Entlang einer mechanischen Bahn $x(t) = (q(t), p(t))$ ändert sich $F(x(t))$ gemäß

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(q(t),p(t)) &= \sum_{k=1}^{2f} \frac{\partial F}{\partial x_k}\dot{x}_k = \sum_{i,k=1}^{2f} \frac{\partial F}{\partial x_k}\varepsilon_{ki}\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Für zwei beliebige Funktionen des Phasenraums $F_1(q,p)$ und $F_2(q,p)$ definiert man die *Poissonklammer*

$$\{F_1, F_2\} \equiv \sum_{i,k=1}^{2f} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\varepsilon_{ik}\frac{\partial F_2}{\partial x_k} = \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha}\right) \tag{7.9}$$

von F_1 und F_2. Mit dieser Notation kann man die Zeitableitung von F (entlang einer mechanischen Bahn) umschreiben als

$$\frac{d}{dt}F(q(t),p(t)) = \{F,H\}(q(t),p(t)), \tag{7.10}$$

wobei wir explizit gemacht haben, dass die Poissonklammer am Punkt $x(t)$ ausgewertet werden muss. Für $F(x) = x_i$ findet man damit die kanonischen Bewegungsgleichungen in der Form

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}. \tag{7.11}$$

Beispiel: Besonders einfache Poissonklammern gibt es zwischen Impuls- und Ortskoordinaten. In der Tat rechnet man leicht nach, dass die „kanonischen Poissonklammern“ gelten

$$\{q^\alpha, q^\beta\} = 0\,, \qquad \{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha{}_\beta\,, \qquad \{p_\alpha, p_\beta\} = 0\,,$$

wobei $\delta^\alpha{}_\beta$ das Kroneckersymbol ist.

Die Poissonklammer sind linear

$$\{aF_1 + bF_2, F_3\} = a\{F_1,F_3\} + b\{F_2,F_3\}, \qquad (a,b \in \mathbb{R}) \tag{7.12}$$

und antisymmetrisch (da $\varepsilon^t = -\varepsilon$)

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}. \tag{7.13}$$

Sie erfüllt zudem die *Jacobi-Identität*

$$\{\{F_1,F_2\},F_3\} + \{\{F_2,F_3\},F_1\} + \{\{F_3,F_1\},F_2\} = 0\,. \tag{7.14}$$

Den Beweis dafür liefern wir am Ende des Kapitels 7.5.

7.4 Kanonische Transformationen

Wie wir zu Beginn von Kapitel 7.3 gesehen haben, sind die hamiltonschen Bewegungsgleichungen im Phasenraum von der einfachen Form $\dot{x}_i = \{x_i, H\}$ oder auch (mit $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^t$)

$$\sum_{i=1}^{2f} \varepsilon_{ik}\, \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial x_k}\,. \tag{7.15}$$

Wir wollen nun die Struktur der bijektiven Koordinatentransformationen

$$\bar{x}_i = \phi_i(x_1, \ldots, x_{2f}) \tag{7.16}$$

studieren, welche die kanonischen Gleichungen (7.15) forminvariant lassen. Das heißt für *jede* Hamiltonfunktion H soll gelten, dass die Bewegungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \dot{\bar{x}}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}_k}\,, \tag{7.17}$$

mit $\bar{H}(\bar{x}) = (\bar{H} \circ \phi)(x) = H(x)$ zu (7.15) äquivalent sind. Transformationen mit dieser Eigenschaft werden *kanonische Transformationen* genannt.

Aus (7.16) und (7.17) folgt direkt

$$\sum_{i,j=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{l=1}^{2f} \frac{\partial H}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k}\,. \tag{7.18}$$

Nun definieren wir die *Jacobi-Matrix*

$$A_{ij}(x) \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}, \tag{7.19}$$

und erhalten damit die Bedingung[1]

$$\sum_{j=1}^{2f} \underbrace{\left(\sum_{i,k=1}^{2f} A_{ij} \varepsilon_{ik} A_{kl} \right)}_{=\varepsilon_{jl},\ \text{da invariant zu (7.15)}} \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial x_l}\,.$$

Wir schließen daraus, dass die kanonischen Transformationen dadurch charakterisiert sind, dass

$$A^t(x) \varepsilon A(x) = \varepsilon \qquad (\text{für alle } x)\,. \tag{7.20}$$

Die linearen Abbildungen $A\colon \mathbb{R}^{2f} \to \mathbb{R}^{2f}$ mit der Eigenschaft $A^t \varepsilon A = \varepsilon$ heißen *symplektisch* und bilden die Gruppe $\mathrm{Sp}(2f)$. Insbesondere gilt

$$(\mathrm{Det}\, A)^2 = 1 \tag{7.21}$$

[1] Man beachte, dass $\partial x_j / \partial \bar{x}_i = (A^{-1})_{ji}$.

und sogar $\operatorname{Det} A = +1$, was wir aber nicht zeigen wollen. Dadurch existiert die Inverse einer kanonischen Transformation. Sei $A \in \mathrm{Sp}(2f)$ dann gelten folgende Eigenschaften:

- $A^{-1} \in \mathrm{Sp}(2f)$, da $(A^{-1})^t \varepsilon A^{-1} = (A^{-1})^t (A^t \varepsilon A) A^{-1} = \varepsilon$,
- $A^t \in \mathrm{Sp}(2f)$, da $\varepsilon = -\varepsilon^{-1} = -((A^{-1})^t \varepsilon A^{-1})^{-1} = -A\varepsilon^{-1}A^t = A\varepsilon A^t$.

Eine kanonische Transformation erhält *alle* Poissonklammern, d. h.

$$\{F_1, F_2\}(x) = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2\}(\bar{x}), \quad \text{wobei } F_1(x) = \bar{F}_1(\bar{x}),\ F_2(x) = \bar{F}_2(\bar{x}). \tag{7.22}$$

Dies folgt einfach daraus, dass[2]

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\} &= \sum_{j,k=1}^{2f} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}\, \varepsilon_{jk}\, \frac{\partial F_2}{\partial x_k} = \sum_{i,l=1}^{2f} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}_i} \underbrace{\left(\sum_{j,k=1}^{2f} A_{ij}\, \varepsilon_{jk}\, A_{lk} \right)}_{=(A\varepsilon A^t)_{il} = \varepsilon_{il},\ \text{da } A^t \in \mathrm{Sp}(2f)} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}_l} \\ &= \{\bar{F}_1, \bar{F}_2\}\,. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Mit der Form (7.11) der kanonischen Bewegungsgleichungen ist natürlich umgekehrt auch klar, dass jede Transformation, welche alle Poissonklammern (7.22) erhält, eine kanonische Transformation definiert.

Beispiel 1: (*Punkttransformationen*) Im lagrangeschen Formalismus können beliebige neue Lagekoordinaten $\bar{q}^\alpha = \bar{q}^\alpha(q^1, \ldots, q^f)$ eingeführt werden. Dabei bleibt die Langrangefunktion definiert durch $T - V$ invariant mit $\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = L(q, \dot{q})$. Die konjugierten Impulse sind daher gegeben durch

$$\bar{p}_\alpha = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial \dot{\bar{q}}^\alpha} \overset{(4.10)}{=} \sum_{\beta=1}^{f} p_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial \bar{q}^\alpha}\,. \tag{7.24}$$

Wie wir im Kapitel 7.7.1 sehen werden, ist diese Transformation natürlich auch kanonisch. Man kann dieses Resultat auch durch direktes Berechnen der Jacobi-Matrix erhalten.

Beispiel 2: Die Gruppe der kanonischen Transformationen ist jedoch wesentlich größer als die Gruppe der Punkttransformationen. Dieser Umstand ist einer der Vorteile des Hamilton- im Vergleich zum Lagrangeformalismus. Zum Beispiel ist auch die Transformation ($f = 1$)

$$\bar{q} = \sqrt{pq^3}\,, \qquad \bar{p} = \sqrt{\frac{p}{q}}\,.$$

eine kanonische Transformation. Zum Beweis berechnen wir die Jacobi-Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\sqrt{pq} & \sqrt{p^{-1}q^3} \\ -\sqrt{pq^{-3}} & \sqrt{p^{-1}q^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Man kann einfach nachprüfen, dass diese symplektisch ist.

[2] In der Literatur wird diese Beziehung oft auch als $\{F_1, F_2\}_{\bar{x}} = \{F_1, F_2\}_x$ geschrieben, wobei der Index der Poissonklammer auf die „Variablen“ der Funktionen F_1, F_2 hinweist.

7.5 Kanonische Flüsse

Seien $x = (x_1, \ldots, x_{2f})$ Phasenkoordinaten auf dem Phasenraum $\Gamma = \mathbb{R}^{2f}$. Sei $\phi_\lambda \colon x \mapsto \bar{x} \equiv x(\lambda)$ ein *kanonischer Fluss*, d. h. eine Schar kanonischer Transformationen mit $x(0) = \phi_0(x) = x$. Durch Ableiten nach λ erhalten wir das erzeugende Vektorfeld $v(x)$, (vgl. (4.53))

$$\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\phi_\lambda(x) = v(\phi_\lambda(x)). \tag{7.25}$$

Die Tatsache, dass die Transformation ϕ_λ zu jedem λ kanonisch sein soll, bedeutet, dass die Jacobi-Matrix

$$(A_\lambda)_{ik}(x) = \frac{\partial(\phi_\lambda)_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \tag{7.26}$$

symplektisch ist für alle x und λ.

Wir wollen nun die Vektorfelder $v(x)$ charakterisieren, welche *kanonische Flüsse* erzeugen. Aus (7.25) folgt (an jedem Punkt x)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(A_\lambda)_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k} v_i(\phi_\lambda(x)) = \sum_{l=1}^{2f} \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial \bar{x}_l}(\bar{x})}_{\equiv V_{il}(\bar{x})} (A_\lambda)_{lk}\,, \tag{7.27}$$

oder in Matrixnotation

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} A_\lambda(x) = V(\bar{x})\, A_\lambda(x)\,, \qquad \text{mit } \bar{x} = \phi_\lambda(x)\,. \tag{7.28}$$

Für $\lambda = 0$ haben wir trivialerweise eine symplektische Transformation mit $A_0(x) = 1$. Damit die Transformation für alle λ symplektisch bleibt, müssen wir daher nur fordern, dass

$$0 = \frac{\partial}{\partial\lambda}(A_\lambda^t \varepsilon A_\lambda) = A_\lambda^t (V^t\varepsilon + \varepsilon V) A_\lambda\,. \tag{7.29}$$

Wegen $\operatorname{Det} A_\lambda \neq 0$ und $\varepsilon^t = -\varepsilon$ ist dies äquivalent zu $(\varepsilon^t V)^t = \varepsilon^t V$ oder (das kl-Element) ausgeschrieben

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \underbrace{\sum_{i=1}^{2f} \varepsilon_{il} v_i(\bar{x})}_{\equiv g_l(\bar{x})} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \underbrace{\sum_{i=1}^{2f} \varepsilon_{ik} v_i(\bar{x})}_{= g_k(\bar{x})}\,. \tag{7.30}$$

Diese Bedingungen bedeuten, dass $g(x)$ der Gradient einer Funktion $F(x)$ ist, d. h.

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^{2f} \varepsilon_{ik} v_i(x) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) \quad \text{bzw.} \quad v_i(x) = \sum_{k=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)\,. \tag{7.31}$$

Die Vektorfelder kanonischer Flüsse sind charakterisiert durch (7.31).

Damit erhalten wir das wichtige Resultat, dass die Differentialgleichung (7.25), welche kanonische Flüsse charakterisiert, die Form von kanonischen Gleichungen (vgl. (7.11))

$$\frac{dx_i(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{k=1}^{2f} \varepsilon_{ik} \frac{\partial F}{\partial x_k}(x(\lambda)) = \{x_i, F\}\,, \tag{7.32}$$

hat. Hierbei spielt der Scharparameter λ die Rolle der Zeit und F jene der Hamiltonfunktion.

Aus der Herleitung folgt auch direkt die Umkehrung: Kanonische Gleichungen erzeugen kanonische Flüsse auf dem Phasenraum. Die Funktion $F(x)$ heißt *erzeugende Funktion* des kanonischen Flusses.

Beispiel: Die Dynamik (Zeitentwicklung) eines *autonomen* hamiltonschen Systems $H = H(x)$ erzeugt einen kanonischen Fluss auf dem Phasenraum mit $\phi_t(q,p) = (q(t), p(t))$. Dabei erfüllen $q(t), p(t)$ die kanonischen Bewegungsgleichungen (7.15) mit den Anfangsbedingungen $q(0) = q$ und $p(0) = p$. Der Fluss ist kanonisch, weil das dazugehörige Vektorfeld $v = (\dot{q}, \dot{p})$ die Bedingung (7.31) mit $F = H$ erfüllt.

Eine wichtige Konsequenz ist die Tatsache, dass die Poissonklammer mit der Zeitentwicklung verträglich ist. In der Tat erhalten wir zu einer festen Zeit t mit $\bar{q} = q(t)$, $\bar{p} = p(t)$ und $F_i = \bar{F}_i \circ \phi_t$ aus (7.23) sofort, dass

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2\}(\bar{q}, \bar{p}) = \{F_1, F_2\}(q,p)$$

und damit

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2\} \circ \phi_t = \{\bar{F}_1 \circ \phi_t, \bar{F}_2 \circ \phi_t\}; \tag{7.33}$$

d. h. die Zeitentwicklung ϕ_t „vertauscht“ mit der Poissonklammer.

Beweis der Jacobi-Identität: Seien $F_i(x)$, $i = 1,2,3$ Funktionen auf dem Phasenraum. Wir betrachten den durch F_3 erzeugten Fluss $x(\lambda) = \phi_\lambda(x)$. Mit (7.10) erhalten wir für die Änderungen der Größen F_1, F_2 und $\{F_1, F_2\}$ unter dem Fluss die Bedingungen

$$\frac{d}{d\lambda} F_i(x(\lambda))\Big|_{\lambda=0} = \{F_i, F_3\}, \quad \frac{d}{d\lambda}\{F_1, F_2\}(x(\lambda))\Big|_{\lambda=0} = \{\{F_1, F_2\}, F_3\}, \tag{7.34}$$

wobei die Poissonklammern bei $x = x(0)$ ausgewertet werden. Aus (7.33) wissen wir, dass die Poissonklammer mit dem Fluss vertauscht, d. h.

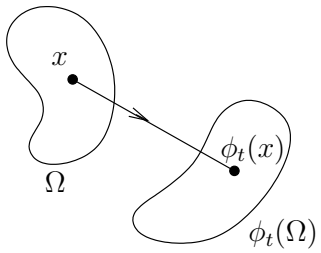
$$\{F_1, F_2\}(x(\lambda)) = \{F_1 \circ \phi_\lambda, F_2 \circ \phi_\lambda\}(x).$$

Leitet man diese Beziehung nach λ ab, erhält man (mit der Produktregel)

$$\frac{d}{d\lambda}\{F_1, F_2\}(x(\lambda))\Big|_{\lambda=0} = \left\{\frac{dF_1(x(\lambda))}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}, F_2\right\} + \left\{F_1, \frac{dF_2(x(\lambda))}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\right\}. \tag{7.35}$$

Einsetzen von (7.34) liefert dann (unter Ausnutzung der Antisymmetrie) die Jacobi-Identität (7.14).

7.5.1 Der Satz von Liouville



Das Phasenvolumen

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega dx_1 \dots dx_{2f} \tag{7.36}$$

jeder Teilmenge $\Omega \subset \Gamma$ des Phasenraums ist invariant unter der Zeitentwicklung, d. h.

$$\mu(\phi_t(\Omega)) = \mu(\Omega)\,. \tag{7.37}$$

Zum Beweis brauchen wir nur die Tatsache, dass ϕ_t ein kanonischer Fluss ist, so dass zu jeder Zeit t die Abbildung $\phi_t \colon x \mapsto \bar{x} = x(t)$ eine kanonische Transformation ist. Damit erhalten wir

$$\mu(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{2f} = \int_\Omega \underbrace{\left|\mathrm{Det}\,\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}\right|}_{=1,\ \text{wegen (7.21)}} dx_1 \dots dx_{2f} = \mu(\Omega)\,. \tag{7.38}$$

Die Gleichung (7.37) besagt, dass jeder kanonische Fluss ϕ_t volumenerhaltend ist.

7.6 Erhaltungsgrößen

Wie wir in Kapitel 7.3 gesehen hatten, ist die zeitliche Änderung einer Größe $F(x)$ längs einer mechanischen Bahn durch

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \{F, H\}(x(t)) \tag{7.39}$$

gegeben. Die Größe F ist also genau dann erhalten, falls die Poissonklammer von F mit H verschwindet.

Seien nun F_1 und F_2 zwei Erhaltungsgrößen, d. h.

$$\{F_1, H\} = \{F_2, H\} = 0\,. \tag{7.40}$$

Dann folgt aus der Jacobi-Identität, dass auch $\{F_1, F_2\}$ eine verschwindende Poissonklammer mit H hat. Damit ist die Poissonklammer zweier Erhaltungsgrößen ist wiederum eine Erhaltungsgröße (*Poissonscher Satz*).

Beispiel: Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ ist durch $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ definiert. Sind zwei Komponenten des Drehimpulses $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{L}$ erhalten, so gilt das auch für die dritte Komponente, da

$$\{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{L}, \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{L}\} = (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{L}\,. \tag{7.41}$$

Zudem gilt

$$\{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{L}, \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{p}\} = (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{p}\,; \tag{7.42}$$

d. h. sind eine Impulskomponente sowie der Drehimpuls erhalten, so sind in der Tat alle Impulskomponenten erhalten.

Wir bezeichnen die von F und H im Sinn von Kapitel 7.5 erzeugten kanonischen Flüsse mit ψ_λ und ϕ_t. Es gilt

$$\frac{d}{dt}F(\phi_t(x))\Big|_{t=0} = \{F,H\} = -\{H,F\} = -\frac{d}{d\lambda}H(\psi_\lambda(x))\Big|_{\lambda=0}. \tag{7.43}$$

Damit ist F genau dann eine Erhaltungsgröße, falls H unter dem von F erzeugten kanonischen Fluss invariant ist mit

$$H(\psi_\lambda(x)) = H(x). \tag{7.44}$$

Zu jeder Erhaltungsgröße gehört daher eine kontinuierliche Symmetrie ψ_λ von H, und umgekehrt. Im gewissen Sinne ist diese Aussage also die Umkehrung des noetherschen Satzes.

Beispiel: Sei $\mathbb{R}^6$ der Phasenraum mit Koordinaten $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ und

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}), \tag{7.45}$$

wobei $\boldsymbol{e}$ ein fester Einheitsvektor ist. Die Differentialgleichungen (7.32) des durch F erzeugten kanonischen Flusses sind (in der Form (7.5))

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{x}, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{d\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{p}. \tag{7.46}$$

Nach Integration erhält man den dazugehörigen kanonischen Fluss

$$\psi_\lambda\colon (\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \mapsto (R(\lambda)\boldsymbol{x}, R(\lambda)\boldsymbol{p}), \tag{7.47}$$

wobei $R(\lambda)$ die Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die Achse $\boldsymbol{e}$ mit Winkel λ ist. Die Komponenten (7.45) des Drehimpulses sind also die erzeugenden Funktionen der Drehungen. Mit (7.43) ist daher die allgemeinste Form des Drehimpulssatzes gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})\Big|_{t=0} = -\frac{d}{d\lambda}H(R(\lambda)\boldsymbol{x}, R(\lambda)\boldsymbol{p})\Big|_{\lambda=0}. \tag{7.48}$$

Damit ist $\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})$ insbesondere genau dann erhalten, wenn H unter den Rotationen um die Achse $\boldsymbol{e}$ invariant ist. Analog ist die Impulskomponente $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}$ die Erzeugende der Translationen $\psi_\lambda\colon (\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \mapsto (\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{e},\boldsymbol{p})$. Daraus resultiert der Impulssatz

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}\Big|_{t=0} = -\frac{d}{d\lambda}H(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{e},\boldsymbol{p})\Big|_{\lambda=0}. \tag{7.49}$$

Ab und zu interessiert man sich für die zeitliche Änderung von $F(x,t)$, d. h. einer Größe F, die explizit von der Zeit abhängt. Wir erhalten (anstelle von (7.39))

$$\frac{d}{dt}F(x(t),t) = \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}\,. \tag{7.50}$$

Insbesondere gilt für $H = H(x,t)$ der *Energiesatz*

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H,H\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{7.51}$$

wegen (7.13). Für autonome Systeme mit $H = H(x)$ ist daher die Energie H erhalten.

7.7 Das hamiltonsche Prinzip im Phasenraum

Nach der Definition der Hamiltonfunktion (7.3) gilt

$$L(q,\dot{q},t) = \langle p,\dot{q}\rangle - H = \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q,p,t)\,. \tag{7.52}$$

Wir erwarten daher, dass sich die Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \Big(\langle p,\dot{q}\rangle - H\Big)dt = 0 \tag{7.53}$$

ableiten lassen, wobei die Position $q^\alpha(t^{(i)})$ an den Endpunkten $t^{(i)}$ festgehalten wird.

Im Phasenraum betrachten wir jedoch q^α und p_β als unabhängige Variablen, während in der ursprünglichen Formulierung des Variationsprinzips, die Variation von $\dot{q}$ durch jene von q vorgegeben war. Es ist daher *a priori* nicht offensichtlich, dass (7.53) die richtigen Bewegungsgleichungen ergibt. Tatsächlich ist jedoch das Variationsprinzip (7.53) äquivalent zu den kanonischen Bewegungsgleichungen. Unter einer Variation der unabhängigen Variablen q^α, p_β (bei festgehaltenen Endpunkten $q^{(i)}$) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\delta \int_{(1)}^{(2)} \Big(\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \dot{q}^\alpha - H\Big)dt \\
&= \int_{(1)}^{(2)} \sum_{\alpha=1}^{f} \left(p_\alpha \delta\dot{q}^\alpha + \dot{q}^\alpha \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right) dt \\
&= \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \underbrace{\delta q^\alpha}_{=0}\Big|_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} \sum_{\alpha=1}^{f} \left[\left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\right)\delta q^\alpha\right] dt\,,
\end{aligned}$$

wobei wir den ersten Term auf der linken Seite der zweiten Zeile partiell integriert haben. Die Randterme verschwinden und wir erhalten gerade die hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

7.7.1 Erzeugung kanonischer Transformationen

Als Vorbereitung auf die Diskussion der Hamilton-Jacobi Gleichung im Kapitel 8 wollen wir nun diskutieren, wie man systematisch kanonische Transformationen konstruieren kann. Wir betrachten ein hamiltonsches System mit Phasenraumkoordinaten $x = (q^1, p_1, \ldots, q^f, p_f)$ und Hamiltonfunktion $H(x,t)$. Wir unterwerfen das System einer (möglicherweise) zeitabhängigen kanonische Transformation

$$\bar{x}_i = \phi_i(x_1, \ldots, x_{2f}, t). \tag{7.54}$$

Da die Transformation kanonisch ist, sind die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten $\bar{x} = (Q^1, P_1, \ldots, Q^f, P_f)$ wiederum die hamiltonschen Gleichungen. Weil die kanonische Transformation aber von der Zeit abhängt, müssen wir im allgemeinen eine neue Hamiltonfunktion $K(\bar{x}, t)$ einführen. Äquivalent dazu ist die Behauptung, dass die beiden Variationsprobleme

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \Big(\langle p, \dot{q} \rangle - H \Big) dt = 0 \quad \text{und} \quad \delta \int_{(1)}^{(2)} \Big(\langle P, \dot{Q} \rangle - K \Big) dt = 0 \tag{7.55}$$

Lösungen $x(t)$ bzw. $\bar{x}(t)$ besitzen, die sich unter (7.54) entsprechen. Hinreichend dafür ist (vgl. (4.46)), dass sich die beiden Integranden in (7.55) um eine totale Ableitung einer Funktion $F(q, Q, t)$ unterscheiden.[3]

Dies bedeutet, dass für *alle* Kurven $x(t)$ gilt[4]

$$\langle p(t), \dot{q}(t) \rangle - H(x(t), t) = \langle P(t), \dot{Q}(t) \rangle - K(\bar{x}(t), t) + \frac{dF}{dt}. \tag{7.56}$$

Umgestellt ergibt sich aus (7.56) der Ausdruck

$$\frac{dF}{dt} = \Big(\langle p, \dot{q} \rangle - \langle P, \dot{Q} \rangle \Big) + (K - H). \tag{7.57}$$

Es ist nützlich, die Funktion F nicht durch die Variablen q und Q sondern durch die alten Koordinaten q und die neuen Impulse P auszudrücken. Den Wechsel von Q auf P als unabhängige Variable leistet eine Legendretransformation. Wir definieren

$$S(q, P, t) = F(q, Q, t) + \langle P, Q \rangle \qquad \text{mit} \quad P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}(q, Q, t). \tag{7.58}$$

[3] Da wir in der Variationsrechnung die Endpunkte δq^α bzw. δQ^α festhalten, modifiziert F die Euler-Lagrange Gleichungen nicht.

[4] Oft schreibt man diese Beziehung auch kompakt

$$\langle p, dq \rangle - H dt = \langle P, dQ \rangle - K dt + dF$$

als Identität von Differentialen. Damit gilt $dF = \langle p, dq \rangle - \langle P, dQ \rangle + (K - H)dt$. Die Legendretransformation auf S erhält man dann mit der Produktregel $d\langle P, Q \rangle = \langle dP, Q \rangle + \langle P, dQ \rangle$ und $dS = dF + d\langle P, Q \rangle$.

Analog zu (7.4) erhalten wir für die partiellen Ableitungen[5]

$$\frac{\partial S}{\partial P_\alpha} = Q^\alpha, \qquad \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{7.59}$$

Damit ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &\equiv \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha - P_\alpha \dot{Q}^\alpha \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \tag{7.60}$$

für die totale zeitliche Ableitung der Funktion $F(q, Q, t)$.

Für eine gegebene Funktion $F(q, Q, t)$ erhält man durch Vergleich von (7.57) mit (7.60) die Beziehungen[6]

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}(q, P, t)\,, \qquad Q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha}(q, P, t)\,, \qquad K = H + \frac{\partial S}{\partial t}\,, \tag{7.61}$$

zwischen den alten (q, p) und den neuen (Q, P) kanonischen Koordinaten (und der neuen Hamiltonfunktion K). Um die kanonische Transformation (7.54) explizit zu erhalten, muss man die erste Gleichung nach P_α auflösen und das Resultat in die zweite Gleichung einsetzen. Damit erhält man

$$Q^\alpha = Q^\alpha(q, p, t), \qquad P_\alpha = P_\alpha(q, p, t). \tag{7.62}$$

Die Bedingung für die Auflösbarkeit an einem Punkt (q_0, P_0, t_0) ist, dass dort

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial P_\beta} \right) \neq 0\,. \tag{7.63}$$

Man nennt $S(q, P, t)$ dabei die *erzeugende Funktion* der (zu jeder Zeit t) kanonischen Transformation (7.62). Die Transformation ist kanonisch für jede *feste* Zeit $t = t_0$, da sie dort durch $S_0(q, P) = S(q, P, t_0)$ erzeugt wird. Für die erzeugende Funktion S_0 verschwindet die Zeitableitung und daher gelten für die neuen Variablen $\bar{x} = \phi(x, t_0)$ die kanonischen Bewegungsgleichungen mit der Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{x}) \equiv K_0(\bar{x}) = H(x)$. Dies entspricht gerade der Definition (7.17) einer kanonischen Transformation.

Durch freie Wahl der Funktion S lassen sich sehr elegant kanonische Transformationen konstruieren. Um dies zu zeigen, betrachten wir zwei Beispiele (analog zu den Beispielen in Kap. 7.4).

[5] Man ersetze $(L, H, \dot{q}, p)$ in (7.4) durch $(-F, S, Q, P)$.

[6] Die erste und letzte Beziehung erhält man aus dem Vergleich. Die mittlere Beziehung folgt aus (7.59).

Beispiel 1: (*Punkttransformationen*) Sei $S = \sum_{\beta=1}^{f} P_\beta Q^\beta(q^1, \ldots, q^f)$, wobei die Funktionen $Q^\alpha(q)$ vorgegeben seien. Dann lauten (7.61)

$$Q^\alpha = Q^\alpha(q^1, \ldots, q^f)\,, \qquad p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{f} P_\beta \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha}\,. \tag{7.64}$$

Nach Auflösen der zweiten Gleichungen nach P_α mit $P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{f} p_\beta(\partial q^\beta/\partial Q^\alpha)$, sind dies die im Zusammenhang mit (7.24) besprochenen Punkttransformationen; wobei wir jetzt bewiesen haben, dass die Transformation kanonisch ist.

Beispiel 2: Für $f = 1$ betrachten wir die erzeugende Funktion $S(q, P) = \frac{1}{2} q^2 P^2$. Gleichung (7.61) liefert

$$Q = q^2 P\,, \qquad p = qP^2. \tag{7.65}$$

Damit erhalten wir die kanonische Transformation

$$Q = \sqrt{pq^3}\,, \qquad P = \sqrt{\frac{p}{q}}\,. \tag{7.66}$$

Bemerkung: Die erzeugende Funktion $S(q, P, t)$ der kanonischen Transformation ist nicht dasselbe wie die erzeugende Funktion $F(q, p)$ eines kanonischen Flusses $(Q, P) = x(\lambda) = \phi_\lambda(q, p)$ aus (7.32). Die Begriffe sind aber eng verwandt. Für kleine λ gilt nämlich

$$S(q, P, \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha q^\alpha + \lambda F(q, P) + O(\lambda^2)\,. \tag{7.67}$$

Beweis: Aus (7.61) wissen wir

$$p_\alpha = P_\alpha + \lambda \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\bigg|_{(q,P)} + O(\lambda^2)\,, \quad Q^\alpha = q^\alpha + \lambda \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\bigg|_{(q,P)} + O(\lambda^2)\,. \tag{7.68}$$

Da $Q^\alpha - q^\alpha = O(\lambda)$ und $P_\alpha - p_\alpha = O(\lambda)$, können wir das Resultat auch umschreiben als

$$Q^\alpha = q^\alpha + \lambda \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\bigg|_{(Q,P)} + O(\lambda^2)\,, \quad P_\alpha = p_\alpha - \lambda \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\bigg|_{(Q,P)} + O(\lambda^2)\,. \tag{7.69}$$

Damit ist $(Q, P) = (q(\lambda), p(\lambda))$ lokal die Lösung der kanonischen Gleichungen $dq^\alpha(\lambda)/d\lambda = \partial F/\partial p_\alpha$, $dp_\alpha(\lambda)/d\lambda = -\partial F/\partial q^\alpha$ zu der Anfangsbedingung $(q(0), p(0)) = (q, p)$ mit $F(q, p)$ der erzeugenden Funktion, vgl. (7.32).

Kapitel 8

Die Hamilton-Jacobi Theorie

Die Hamilton-Jacobi Theorie ist eine weitere Umformulierung der klassischen Mechanik. Sie umfasst alle Resultate der lagrangenschen und hamiltonschen Formulierung, liefert aber zudem ein tieferes Verständnis von Integrabilität. Außerdem erlaubt sie, wie in Kapitel 8.5 dargestellt, einen direkten Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.

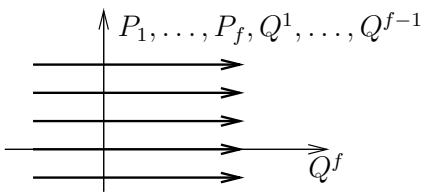
8.1 Der zeitunabhängige Fall

Wir betrachten nun ein autonomes System, d. h. ein System bei dem die Hamiltonfunktion nicht explizit von t abhängt, $H = H(q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f)$. Wir versuchen eine zeitunabhängige kanonische Transformation zu finden, so dass K gerade eine der neuen Impulskoordinaten ist, z. B. $K(Q,P) = P_f$, wobei P_f natürlich der Energie E entspricht. Wenn dies gelingt, so sind die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{P}_\alpha &= -\frac{\partial K}{\partial Q^\alpha} = 0\,, && (\alpha = 1, \dots, f)\,, \\ \dot{Q}^\alpha &= \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} = 0\,, && (\alpha = 1, \dots, f-1)\,, && \dot{Q}^f = \frac{\partial K}{\partial P_f} = 1\,. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Die Bewegungsgleichung sind dann trivial lösbar mit

$$\begin{aligned} P_\alpha(t) &= P_\alpha(0)\,, && (\alpha = 1, \dots, f)\,, \\ Q^\alpha(t) &= Q^\alpha(0)\,, && (\alpha = 1, \dots, f-1)\,, \\ Q^f(t) &= Q^f(0) + t\,. \end{aligned}$$



Kanonischer Fluß zur Hamiltonfunktion $K = P_f$.

Wie wir im Kapitel 7.7.1 gesehen haben muss dazu eine erzeugende Funktion $S_0 = S_0(q, P)$ so bestimmt werden, dass (siehe (7.61))

$$H\Big(q^1, \ldots, q^f, \frac{\partial S_0}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q^f}\Big) = P_f \equiv E\,. \tag{8.2}$$

Diese Gleichung wird die *zeitunabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung* genannt. Sie ist eine (durch P_f parametrisierte) partielle Differentialgleichung erster Ordnung für S_0. Damit S_0 tatsächlich nach q^α aufgelöst werden kann, benötigt man eine Schar von Lösungen[1]

$$S_0(q^1, \ldots, q^f, P_1, \ldots, P_f) \qquad \text{mit} \quad \mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) \neq 0\,, \tag{8.3}$$

parametrisiert durch $(f-1)$-Parameter $P_1, \ldots, P_{f-1}$ und natürlich auch P_f. Eine solche Lösung wird *vollständiges Integral* genant.[2]

Dabei ist es wichtig, dass $Q(q, P, t)$ nach q aufgelöst werden kann mit der Bedingung (vgl. (7.63))

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) \neq 0. \tag{8.4}$$

Notwendig für die Auflösbarkeit ist daher zumindest, dass

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right)_{\substack{\alpha=1,\ldots,f \\ \beta=1,\ldots,f-1}} = f - 1\,. \tag{8.5}$$

Diese Bedingung ist in der Tat auch hinreichend. Aus (8.2) folgt durch Ableitung nach $P_1, \ldots, P_f$

$$\sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial^2 S_0}{\partial q^\alpha \partial P_\beta} = 0\,, \quad (\beta = 1, \ldots, f-1)\,, \qquad \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial^2 S_0}{\partial q^\alpha \partial P_f} = 1\,.$$

Die letzte Spalte ($\beta = f$) der Matrix (8.4) kann deshalb keine Linearkombination der ersten $f-1$ sein. Zudem ergibt sich als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (8.2), dass im betrachteten Gebiet des Phasenraums nirgendwo

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \ldots = \frac{\partial H}{\partial p_f} = 0 \tag{8.6}$$

gilt.

[1] Im Allgemeinen ist $S_0(q, P) + A$ mit $A \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Die zusätzliche additive Konstante A ist in der Mechanik jedoch irrelevant.

[2] Wie wir in Kapitel 5.3 gesehen haben hängt eine *allgemeine Lösung* einer partiellen Differentialgleichung von unbestimmten Funktionen (und nicht nur von Parametern) ab.

Aus der vollständigen Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung ergibt sich die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten wie folgt. Zu gegebenen Werten der Erhaltungsgrößen $P_1, \ldots, P_f$ entspricht jede der Gleichungen

$$\frac{\partial S_0}{\partial P_\beta}(q, P) = Q^\beta\,, \qquad (\beta = 1, \ldots, f-1) \tag{8.7}$$

für $q = (q^1, \ldots, q^f)$ einer Fläche im Konfigurationsraum, welche nach (8.5) linear unabhängige Normalen haben. Ihr Durchschnitt ist die (1-dimensionale) Bahnkurve. Das zeitliche Durchlaufen dieser Bahnkurve ist gegeben durch

$$\frac{\partial S_0}{\partial E}(q, P) = Q^f(0) + t \equiv t_0 + t. \tag{8.8}$$

Die $2f$-Konstanten $Q^1, P_1, \ldots, t_0, E$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Beispiel 1: Der harmonische Oszillator hat die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}fq^2.$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{f/m}$. Die Hamilton-Jacobi Gleichung für $S_0(q)$ ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}fq^2 = E$$

mit der Lösung

$$S_0(q) = \int_0^q dx\,\sqrt{m(2E - fx^2)}. \tag{8.9}$$

Die Bewegung ist gegeben durch (8.8). Mit

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = \int_0^q dx\,\sqrt{\frac{m}{2E - fx^2}} = \frac{1}{\omega}\arcsin\Big(q/\sqrt{2E/f}\Big) = t_0 + t$$

erhalten wir die allgemeine Lösung

$$q(t) = \sqrt{2E/f}\,\sin\big(\omega(t_0 + t)\big).$$

8.2 Separable Probleme

Falls man die Hamilton-Jacobi Gleichung (8.2) als

$$f\Big(q^1, \frac{\partial S_0}{\partial q^1}\Big) = F\Big(q^2, \ldots, q^f, \frac{\partial S_0}{\partial q^2}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q^f}\Big)\,, \tag{8.10}$$

schreiben kann, so heißt die Koordinate q^1 *separierbar*. Der Separationsansatz

$$S_0(q^1,\ldots,q^f) = S_1(q^1) + \tilde{S}_0(q^2,\ldots,q^f) \tag{8.11}$$

führt dann auf die beiden Gleichungen

$$f\Big(q^1, \frac{dS_1}{dq^1}\Big) = P_1\,, \qquad F\Big(q^2,\ldots,q^f, \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial q^2},\ldots,\frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial q^f}\Big) = P_1\,, \tag{8.12}$$

wobei P_1 konstant ist, da die linke bzw. rechte Seite von (8.10) nicht von $q^2,\ldots,q^f$ bzw. q^1 abhängt. Aus (8.12) findet man durch Lösen der ersten Gleichung die Funktion $S_1(q^1, P_1)$.

Das Problem ist *vollständig separabel*, falls man mit der zweiten Gleichung in gleicher Weise verfahren kann, usw. In diesem Fall ist das Resultat eine vollständige Lösung

$$S_0(q^1,\ldots,q^f,P_1,\ldots,P_{f-1},P_f) = S_1(q^1,P_1) + S_2(q^2,P_1,P_2) + \ldots \\ + S_f(q^f,P_1\ldots P_{f-1}) \tag{8.13}$$

der Hamilton-Jacobi-Gleichung (8.2), da jeder Term natürlich noch von $P_f = E$ abhängen kann. Die (vollständige) Separierbarkeit eines Problems bezieht sich immer auf besondere Koordinaten $q = (q^1,\ldots,q^f)$, deren Existenz eine Ausnahme als die Regel ist. Für eine Auflistung von Problemen, welche vollständig separierbar sind, siehe Landau & Lifschitz.

Beispiel 2: (*Zyklische Koordinate*) Falls die Koordinate q^1 zyklisch ist, geht sie nicht explizit in die Hamilton-Jacobi Gleichung ein. Damit kann man das System trivial separieren mit $f(q^1, dS_1/dq^1) = dS_1/dq^1$. Wir erhalten damit sofort $S_1 = P_1 q^1$ und

$$S_0 = P_1 q^1 + \tilde{S}_0.$$

Die Konstante P_1 ist natürlich nichts anderes als der konjugierte Impuls $\partial S_0/\partial q^1$.

Beispiel 3: (*Das ebene Zentralkraftproblem*) Wir betrachten das ebene Zentralkraftproblem in Polarkoordinaten (siehe Beispiel (ii) in Kapitel 7.2), für das die Hamiltonfunktion durch

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r)$$

gegeben ist. Die Hamilton-Jacobi Gleichung ist

$$\frac{1}{2m}\Big[\Big(\frac{\partial S_0}{\partial r}\Big)^2 + r^{-2}\Big(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\Big)^2\Big] + V(r) = E\,,$$

mit $E \equiv P_2$. Diese Gleichung ist separabel, da sie sich umschreiben lässt als

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mr^2(E - V(r)) - r^2\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2. \tag{8.14}$$

Mit dem Separationsansatz $S_0(r,\varphi) = S_r(r) + S_\varphi(\varphi)$ müssen beide Seiten von (8.14) gleich einer Separationskonstanten $l^2 \equiv P_1^2$ sein. Es folgt daher, dass

$$S_\varphi(\varphi) = l\varphi\,, \qquad S_r(r) = \int^r dx\, \sqrt{2m(E - V(x)) - l^2 x^{-2}}\,, \tag{8.15}$$

bis auf irrelevante additive Konstanten. Die Bahn $\varphi(r)$ sowie die zeitliche Abhängigkeit $t(r)$ ergeben sich nun aus (8.7) und (8.8)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_0}{\partial l} &= \varphi - \int^r \frac{l}{x^2} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - V(x)) - l^2 x^{-2}}} = \varphi_0\,, \\
\frac{\partial S_0}{\partial E} &= \int^r \frac{m\,dx}{\sqrt{2m(E - V(x)) - l^2 x^{-2}}} = t_0 + t\,,
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten t_0, φ_0 durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Dieses Resultat stimmt natürlich mit (2.14) und (2.12) überein.

Bemerkung: Eine vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung liefert direkt die f-Erhaltungsgrößen P_β. Dass P_β Erhaltungsgrößen sind, erhält man aus

$$\{H(x), P_\beta(x)\} = \{P_f, P_\beta\} = 0, \tag{8.16}$$

wobei wir (7.22) und (8.2) verwendet haben. Zudem sind sie in *Involution*, d. h.

$$\{P_\alpha(x), P_\beta(x)\} = \{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \quad \text{(für alle } \alpha, \beta). \tag{8.17}$$

Die Erhaltungsgrößen sind auch *unabhängig*[3] voneinander, da (aus (8.4))

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial P_\alpha(q,p)}{\partial p_\beta}\right) = \mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial q^\beta \partial P_\alpha}\right)^{-1} \neq 0\,. \tag{8.18}$$

Man nennt ein mechanisches System mit f-Freiheitsgraden *vollständig integrabel* (im liouvilleschen Sinne), wenn es f unabhängige Erhaltungsgrößen in Involution gibt. Somit ist jedes System, für welches es eine vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung gibt, vollständig integrabel.[4]

Man beachte, dass man in der lagrangeschen Mechanik $2f$ Integrale der Bewegung braucht, um ein Problem vollständig zu integrieren. Es stellt sich heraus, dass man mit der hamiltonschen Methode nur f Erhaltungsgrößen braucht, welche allerdings in Involution sein müssen. Jede zusätzliche Erhaltungsgröße reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade um 2.

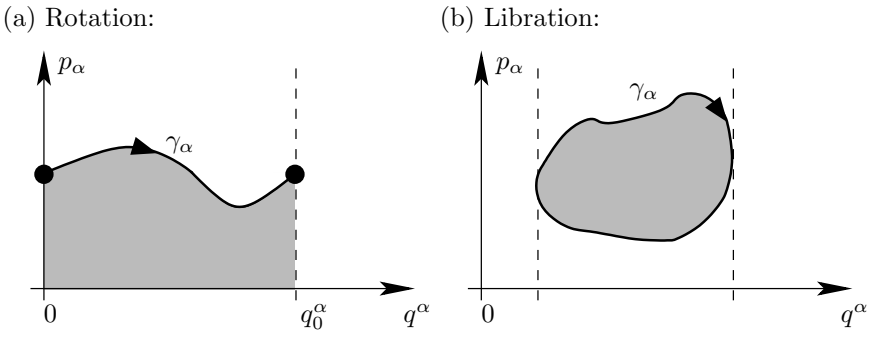


Abbildung 8.1: Die Wirkungsvariable J_α ist die (gerichtete) Fläche (dividiert durch 2π) unter der Kurve $p_\alpha(q^\alpha)$. Es gibt dabei zwei Klassen von Bahnkurven. (a) Rotation (nur möglich für periodische Variablen): Die Kurve verbindet zwei äquivalente Punkte mit $q^\alpha = 0$ und $q^\alpha = q_0^\alpha$; q_0^α bezeichnet die Periode. (b) Libration: Die Kurve umschließt eine Fläche im Phasenraum. Die Bewegung in q ist begrenzt durch zwei Umkehrpunkte (gestrichelte Linien) bei P fest.

8.3 Winkel-Wirkungsvariablen

Wir möchten die Struktur des Phasenraumes für ein vollständig separables Problem mit

$$S_0(q, P) = \sum_{\alpha=1}^{f} S_\alpha(q^\alpha, P), \tag{8.19}$$

das eine endliche Bewegung in allen Koordinaten ausführt, etwas genauer untersuchen.[5] Man kann dann eine spezielle Wahl der kanonischen Koordinaten, die sogenannten *Winkel-Wirkungsvariablen*, treffen, in denen der Konfigurationsraum ein Torus und die Bewegung bedingt periodisch wird. Diese Variablen sind nützlich für Störungstheorie, Probleme mit langsam (adiabatisch) veränderlichen Parametern und für die quasiklassische Beschreibung von quantenmechanischen Problemen.

Der kanonische Impuls $p_\alpha(q^\alpha, P) = \partial S_\alpha / \partial q^\alpha$ ist (bei festen P) nur eine Funktion der Koordinate q^α. Da die Bewegung endlich ist, ist die Bahnkurve γ_α im Unterraum (q^α, p_α) geschlossen. Wir definieren die *Wirkungsvariablen* J_α durch das Kurvenintegral entlang γ_α

$$J_\alpha(P) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\alpha} p_\alpha(q^\alpha)\, dq^\alpha = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\alpha} \langle p, dq \rangle, \qquad (P \text{ fest}). \tag{8.20}$$

Es gibt dabei zwei Klassen von Bahnkurven, siehe Abbildung 8.1:

[3] Die Größen P_α sind unabhängig, falls die Matrix $\partial P_\alpha / \partial x_k$ den vollen Rang f hat.

[4] Diese Resultat gilt auch umgekehrt: ein vollständig-integrables System hat eine (globale) Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung.

[5] Obwohl technisch schwieriger, bleiben die meisten Resultate auch für ein allgemeines vollständig-integrables System mit den nötigen Anpassungen gültig.

(a) *Rotation* (Bsp. Winkel φ in Polarkoordinaten): q^α ist eine periodische Variable mit Periode q_0^α und die Kurve γ_α verbindet $q^\alpha = 0$ mit $q^\alpha = q_0^\alpha$,

(b) *Libration* (Bsp. Position q beim harmonischen Oszillator): die Kurve γ_α ist eine geschlossene Kurve im Phasenraum (q^α, p_α).

Aus der Definition ergibt sich, dass $J_\alpha = J_\alpha(P)$ nur von den Erhaltungsgrößen P abhängt und daher auch J_α selbst Erhaltungsgrößen sind. Falls

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial J_\alpha}{\partial P_\beta}\right) \neq 0$$

ist der Zusammenhang $J(P)$ umkehrbar mit $P = P(J)$ und man kann J als neue Impulse definieren. Der Wechsel von (q, p) auf (ϕ, J) wird dann durch die erzeugende Funktion $\tilde{S}_0(q, J) = S_0(q, P(J))$ geleistet. Die neuen Koordinaten

$$\phi^\alpha(q, J) = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial J_\alpha}(q, J) \tag{8.21}$$

werden als *Winkelvariablen* bezeichnet. Im Allgemeinen ist ϕ^α eine Funktion von (allen) $q^1, \ldots, q^f, J_1, \ldots, J_f$.

Die neue Hamiltonfunktion ist gegeben durch $K(J) = P_f(J)$ und hängt nicht von den Winkelvariablen ab. Die Winkelvariablen erfüllen damit die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\phi}^\alpha = \frac{\partial K(J)}{\partial J_\alpha} = \omega^\alpha(J). \tag{8.22}$$

Da J Erhaltungsgrößen sind, hängen alle Winkelvariablen nur linear von der Zeit ab mit

$$\phi^\alpha = \omega^\alpha(J)t + \phi_0^\alpha; \tag{8.23}$$

ϕ_0^α sind Integrationskonstanten, welche durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass ϕ^α in Wirklichkeit periodische Variablen sind, so dass ϕ^α und $\phi^\alpha + 2\pi$ demselben Zustand (q, p) entsprechen. Damit ist der Konfigurationsraum T mit $\phi \in T$ ein f-dimensionaler Torus ($T = S^1 \times \cdots \times S^1$) und die Bewegung (8.23) entspricht einer *bedingt-periodischen* Bewegung, wobei jede Winkelvariable ϕ^α eine periodische Bewegung mit der Kreisfrequenz ω^α ausführt.

Um zu zeigen, dass ϕ^α eine periodische Variable (mit Periode 2π) ist, wollen wir die Änderung $\Delta\phi^\alpha$ berechnen, wenn das System auf dem Weg γ_β auf denselben Zustand übergeht.[6] Diese Frage dreht sich nur um den Konfigurationsraum und damit um die Beziehung $\phi(q, P)$ und nicht darum, ob die mechanische Bahn periodisch ist. Wir betrachten daher die (virtuelle) Verschiebung (bei festem P bzw. J)

$$\delta\phi^\alpha = \sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial q^\beta}\, \delta q^\beta = \sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial^2 \tilde{S}_0}{\partial J_\alpha \partial q^\beta}\, \delta q^\beta = \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \langle p(q, J), \delta q \rangle. \tag{8.24}$$

[6] Man beachte, dass γ_β eine *geschlossene* Kurve ist.

Nach Integration über die Kurve γ_β erhalten wir

$$\Delta\phi^\alpha = \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \underbrace{\oint_{\gamma_\beta} \langle p, dq\rangle}_{=2\pi J_\beta} = 2\pi\delta_{\alpha\beta}, \tag{8.25}$$

so dass sich nach dem Durchlaufen der Kurve γ_β (nur) die Winkelvariable ϕ^β um 2π geändert hat. Da das System unter allen Kurven γ_β ($\beta = 1, \ldots, f$) auf denselben Zustand übergeht, erhalten wir das gewünschte Resultat, dass alle ϕ^α periodische Variablen sind.

Mit diesem allgemeinen Resultat können wir Aussagen über die Bewegung eines integrablen Systems treffen, ohne die Bewegungsgleichungen explizit zu lösen. Wir nehmen vereinfachend an, dass alle Bewegungen von der Librationsklasse sind.[7] Die Winkel-Wirkungsvariablen definieren die Position $q(\phi, J)$ in eindeutiger Weise und es muss gelten, dass $q(\phi + 2\pi m, J) = q(\phi, J)$ mit $m \in \mathbb{Z}^f$. Wir können deshalb die (periodische) Funktion $q(\phi)$ als Fourierreihe schreiben. Wir erhalten damit die zeitliche Abhängigkeit von $q^\alpha(t)$ als

$$q^\alpha(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^f} A^\alpha_m e^{i\langle m,\phi\rangle} \equiv \sum_{m\in\mathbb{Z}^f} A^\alpha_{m_1,\ldots,m_f} \exp\left(i\sum_{\beta=1}^{f} m_\beta(\omega^\beta t + \phi^\beta_0)\right). \tag{8.26}$$

Eine analoge Entwicklung findet man auch für $p(t)$ und damit für jede Funktion $F(q, p)$.

Da die Frequenzen im Allgemeinen nicht kommensurabel sind, ist die Bewegung $q(t)$ des Systems nicht periodisch sondern nur *bedingt periodisch*. In einigen Fällen können zwei (oder mehrere) der Kreisfrequenzen ω^α kommensurabel sein. Falls zum Beispiel $\omega^1/\omega^2 \in \mathbb{Q}$ gilt, dann spricht man von einer *Entartung* der Bewegung von ϕ^1 und ϕ^2. Im Extremfall, bei dem alle f Kreisfrequenzen kommensurabel sind, nennt man die Bewegung des Systems *vollständig entartet*. In diesem Fall ist die Bewegung natürlich streng periodisch und sämtliche Bahnen sind geschlossen.

Beispiel 1 (Fortsetzung): Die Bahnkurve des harmonischen Oszillators (bei E fest) ist eine Libration (zwischen den Umkehrpunkten $\pm q^*$ mit $q^* = \sqrt{2E/f}$). Wir erhalten damit die Wirkungsvariable

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint p(q)\,dq = \frac{2}{2\pi}\int_{-q^*}^{q^*} \sqrt{m(2E - fq^2)}\,dq = \frac{E}{\omega}.$$

Die Wirkung $\tilde{S}_0(J)$ ist gegeben durch $S_0(E)$ aus (8.9) mit dem Zusammenhang $E = \omega J$. Wir erhalten damit die zugehörige Winkelvariable

$$\phi = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial J} = \omega\frac{\partial S_0}{\partial E} = \arcsin\left(\frac{q}{q^*}\right).$$

[7] Für Rotationen gilt das Resultat (8.26) für $\tilde{q}^\alpha = q^\alpha - q^\alpha_0\phi^\alpha/2\pi$.

Die Bewegung ist vollständig entartet (wie immer mit nur einem Freiheitsgrad) mit der Periode $2\pi/\omega$.

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass der Konfigurationsraum eines vollständig integrablen Systems ein f-dimensionaler Torus ist. Das KAM-Theorem (Kolmogorow (1956), Arnold (1965), Moser (1965)) beschreibt die Stabilität dieses Resultats gegenüber (kleinen) Störungen mit

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{integrabel}} + \varepsilon H_1.$$

Das Resultat ist: Hat H_0 Kreisfrequenzen ω^α, welche „genügend inkommensurabel“ sind, so hat das gestörte System H für $\varepsilon \ll 1$ überwiegend Lösungen, die ebenfalls bedingt-periodisch sind und sich nur wenig von denen von H_0 unterscheiden. Genügend inkommensurabel bedeutet in diesem Fall, dass $\beta > 0$ und $\tau > f - 1$ existieren, so dass

$$|\langle k, \omega\rangle| = \left|\sum_{\alpha=1}^{f} k_\alpha \omega^\alpha\right| \geq \frac{\beta}{\left(\sum_{\alpha=1}^{f} |k_\alpha|\right)^\tau}, \quad \text{(für alle } k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0\text{)}.$$

Quasiklassische Quantisierung: Mit den Winkel-Wirkungsvariablen kann man integrable Systeme (quasiklassisch) quantisieren (*Einstein-Keller Quantisierung*). Dafür verlangt man, dass die Wirkungsvariablen keine kontinuierlichen Größen, sondern Vielfache des *planckschen Wirkungsquantums*

$$\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \tag{8.27}$$

sind. Man fordert dabei konkret, dass

$$J_\alpha = \hbar(n_\alpha + \nu_\alpha), \qquad (n_\alpha \in \mathbb{Z}), \tag{8.28}$$

wobei $\nu_\alpha = 0$ bei Rotation und $\nu_\alpha = \frac{1}{2}$ bei Libration.[8] Für eine Libration ist die Fläche in Abbildung 8.1 immer positiv und damit machen nur $n_\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ Sinn.

Beispiel 1 (Fortsetzung): Für den harmonischen Oszillator haben wir $J = E/\omega$ gefunden. Da die Bewegung vom Librationstyp ist, verlangt die quasiklassische Quantisierung, dass

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

was genau dem Spektrum des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik entspricht.

[8] Diese Regel ist ein wenig verkürzt, es gilt im Allgemeinen, dass $4\nu_\alpha$ durch den Keller-Maslov Index gegeben ist.

8.3.1 Adiabatische Invarianten

Wir betrachten ein (autonomes) integrables System bestimmt durch die Hamiltonfunktion $H \equiv H(q, p; \lambda)$, welche von einem externen Parameter λ abhängt. Die Bewegung des Systems ist charakterisiert durch die Zeitskala

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\min}}$$

mit der kleinsten Kreisfrequenz $\omega_{\min} = \min_\alpha \omega^\alpha$. Wir möchten das mechanische System verstehen, wenn der Parameter $\lambda = \lambda(t)$ in der Hamiltonfunktion *adiabatisch* (d. h. langsam) verändert wird mit[9]

$$T \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| \ll |\lambda| \,. \tag{8.29}$$

Da das (autonome) System integrabel ist, gibt es eine erzeugende Funktion $S_0(q, J; \lambda)$ mit $E = K(J; \lambda)$, so dass J die Wirkungsvariablen (bei konstantem λ) sind. Die zugehörigen Winkelvariablen bezeichnen wir (wie immer) mit ϕ^α.

Wir transformieren nun das (volle) zeitabhängige Problem $H(q, p; \lambda(t))$ mit der zeitabhängigen erzeugenden Funktion $S(q, J, t) = S_0(q, J; \lambda(t))$. Damit erhalten wir die neue (zeitabhängige) Hamiltonfunktion

$$\tilde{K} = K(J; \lambda) + \frac{\partial S}{\partial t} = K(J; \lambda) + \Lambda(\phi, J; \lambda)\dot{\lambda} \tag{8.30}$$

mit

$$\Lambda = \frac{\partial S_0(q, J; \lambda)}{\partial \lambda}. \tag{8.31}$$

Um $\tilde{K}$ als neue Hamiltonfunktion auf den kanonischen Variablen (ϕ, J) auffassen zu können, muss natürlich noch q in S_0 mit (8.21) durch ϕ und J ausgedrückt werden.

Die kanonischen Gleichungen für die Winkel-Wirkungsvariablen lauten damit

$$\dot{J}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \phi^\alpha} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi^\alpha}\dot{\lambda}, \tag{8.32}$$

$$\dot{\phi}^\alpha = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial J} = \omega^\alpha(J; \lambda) + \frac{\partial \Lambda}{\partial J_\alpha}\dot{\lambda} \tag{8.33}$$

mit den Kreisfrequenzen $\omega^\alpha = \partial K(J; \lambda)/\partial J_\alpha$. Es ist somit direkt ersichtlich, dass die Variablen J keine Erhaltungsgrößen mehr sind. Die Gleichungen (8.32) und (8.33) sind noch exakt. Wir wollen nun die erste Gleichung (8.32) über eine Zeit τ mitteln, mit $\tau|\dot{\lambda}| \ll |\lambda|$ und $\tau \gg T$.

[9] Es ist schwer eine genaue Bedingung für die Anwendbarkeit des adiabatischen Resultats zu formulieren. In der Herleitung werden wir implizit den Grenzwert $T|\dot{\lambda}| \to 0$ nehmen.

Wegen der ersten Bedingung haben wir $\dot{\overline{\lambda}} = \overline{\dot{\lambda}} \approx \dot{\lambda}$ und wir können auf der rechten Seite von (8.32) $\dot{\lambda}$ als Konstante aus dem Mittelwert ziehen. Damit erhalten wir

$$\overline{\dot{J}_\alpha} = -\overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi^\alpha}\dot{\lambda}} \approx -\overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi^\alpha}}\dot{\lambda} \tag{8.34}$$

mit $\overline{f}(t) = \tau^{-1}\int_t^{t+\tau} dt'\, f(t')$.

Die zweite Bedingung liefert

$$\overline{f(\phi, J)} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt'\, f(\omega t' + \phi_0, J) \approx \frac{1}{(2\pi)^f}\int_{[0,2\pi]^f} d^f\phi\, f(\phi, J) \tag{8.35}$$

für eine beliebige Funktion $f(\phi, J)$ auf dem Phasenraum, da die Bewegung über viele Perioden von ϕ_α verläuft und damit den gesamten Phasenraum (bei festem J) abdeckt; hier haben wir angenommen, dass die Bewegung nicht entartet ist.[10] Damit erhalten wir sofort, dass

$$\overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi^\alpha}} \approx \frac{1}{(2\pi)^f}\int_{[0,2\pi]^f} d^f\phi\, \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi^\alpha} = 0 \tag{8.36}$$

da $\Lambda(\phi, J; \lambda)$ (wie jede physikalische Größe) eine 2π-periodische Funktion in ϕ^α ist. Die Gleichung (8.34) liefert das zentrale Resultat

$$\overline{\dot{J}_\alpha} = \dot{\overline{J}}_\alpha \overset{(8.35)}{\approx} \dot{J}_\alpha \approx 0, \tag{8.37}$$

d. h. die Wirkungsvariablen J_α bleiben bleiben bei einer langsamen Änderung eines externen Parameters λ konstant und sind damit *adiabatische Invarianten.*

Beispiel 1 (Fortsetzung): Wir betrachten jetzt die Situation, dass die Kreisfrequenz des Oszillator langsam verändert wird. Nach den Überlegungen in diesem Kapitel, bleibt damit die Winkelvariable $J = E/\omega$ näherungsweise konstant. Wir haben damit das Ergebnis, dass

$$E(t) = \omega(t)J,$$

d. h. die Energie des Oszillators ändert sich proportional zur Kreisfrequenz.

8.4 Zeitabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung

Wir wollen noch ein (nicht autonomes) System betrachten, dessen Hamiltonfunktion $H \equiv H(q^1, \ldots, q^f, p_1, \ldots, p_f, t)$ nun auch von der Zeit abhängt. Wir suchen nun eine

[10] Das adiabatische Theorem bleibt auch für eine entartete Bewegung gültig. Man ersetzt dann einfach, die Mittelung über den Torus in (8.35) durch die entsprechende Untermenge der erreichbaren Koordinaten.

zeitabhängige kanonische Transformation, so dass in den neuen Koordinaten die Hamiltonfunktion $K(Q^1,\ldots,Q^f,P_1,\ldots,P_f,t)\equiv 0$ ist. Dann sind $Q^1,\ldots,P_f$ konstant und die Bewegung ist in Ruhe transformiert. Nach (7.61) ist die entsprechende erzeugende Funktion $S(q,P,t)$ eine Lösung der *zeitabhängigen Hamilton-Jacobi Gleichung*

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\Big(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\Big)=0\,, \tag{8.38}$$

mit der Bedingung

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right)\neq 0\,. \tag{8.39}$$

Die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten ergibt sich aus den f Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial P_\alpha}(q,P,t)=Q^\alpha\,,\qquad \text{also}\quad q^\alpha=q^\alpha(Q,P,t)\,, \tag{8.40}$$

wobei die Konstanten $(Q,P)=(Q^1,\ldots,Q^f,P_1,\ldots,P_f)$ durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Einsetzen in $p_\alpha=(\partial S/\partial q^\alpha)(q,P,t)$ liefert dann $p_\alpha=p_\alpha(Q,P,t)$.

Falls das System autonom ist, so ist (8.38) äquivalent zu (8.2). In diesem Fall können wir den Separationsansatz

$$S(q,t)=S_0(q)+S_t(t) \tag{8.41}$$

wählen und erhalten

$$H\Big(q,\frac{\partial S_0}{\partial q}\Big)=-\dot S_t\equiv P_f\,, \tag{8.42}$$

wobei $P_f\equiv E$ die Separationskonstante ist mit $S_t(t)=-P_f t$. Da

$$\frac{\partial S}{\partial P_\beta}=\frac{\partial S_0}{\partial P_\beta}-\delta_{\beta f}t\,, \tag{8.43}$$

gehen dann die Gleichungen (8.40) gerade in die zeitunabhängigen Hamilton-Jacobi Gleichungen (8.7) und (8.8) über.

Bemerkung: Die Erzeugende $S(q,P,t)$ der Hamilton-Jacobi Theorie hängt mit der Wirkung $S[q(t)]$ aus dem hamiltonschen Prinzip zusammen. Mit (7.61) erhalten wir für die Ableitung entlang der mechanischen Bahn

$$\frac{d}{dt}S(q,P,t)=\sum_{\alpha=1}^{f}(p_\alpha\dot q^\alpha+Q^\alpha\dot P^\alpha)+(K-H)=\sum_{\alpha=1}^{f}p_\alpha\dot q^\alpha-H=L, \tag{8.44}$$

wobei wir $K=0$ und $\dot P_\alpha=0$ verwendet haben. Die Integration über die Zeit führt auf das Resultat

$$S(q^{(1)},P,t^{(1)})-S(q^{(0)},P,t^{(0)})=\int_{(0)}^{(1)}dt\,L(q,\dot q,t)=S[q(t)]. \tag{8.45}$$

Die Aussage der Gleichung ist, dass $S(q,P,t)$ durch die entlang der mechanischen Bahn $q\colon t \mapsto q(t)$ berechnete Wirkung $S[q(t)]$ des Problems gegeben ist: die Differenz der Erzeugenden*funktion* $S(q,P,t)$ ist das Wirkungs*funktional* ausgewertet auf der mechanischen Bahn, welche $q^{(0)}$ mit $q^{(1)}$ verbindet. Aus diesem Grunde wird die Erzeugende der kanonischen Transformation auch als Wirkung bezeichnet. Ein analoger Zusammenhang besteht zwischen der verkürzten Wirkung $S_0[q(t)]$ des Euler-Maupertius Prinzips und der erzeugenden Funktion $S_0(q,P)$ im zeitunabhängigen Fall.

Man sieht an obiger Konstruktion sehr deutlich, wie sich bei der Hamilton-Jacobi Methode die Schwierigkeit des Problems von der Lösung der Bewegungsgleichungen (in den neuen Koordinaten trivial) auf das Auffinden der Koordinatentransformation (nicht-trivial) verlagert hat. Die erzeugende Funktion, welche die Koordinatentransformation vermittelt, ist durch Integration über die Lösung des Problems gegeben. Die Kenntis der erzeugenden Funktion ist damit äquivalent zur Lösung des Problems.

8.5 Ausblick auf die Wellenmechanik

Ausgangspunkt ist die Analogie der Mechanik eines Teilchens und der Strahlenoptik, besonders deutlich in den Variationsprinzipien

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds\, \sqrt{E - V(\boldsymbol{x})} = 0 \qquad \text{(Euler-Maupertuis)}, \tag{8.46}$$

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds\, n(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{(Fermat)}. \tag{8.47}$$

Schrödinger (1926) baute darauf eine Wellenmechanik auf, welche sich zur klassischen Mechanik so verhält, wie die Wellenoptik zur Strahlenoptik; d. h. der Mechanik liegt eine Wellenmechanik zugrunde nach dem Schema

$$\begin{array}{ccc} \text{geometrische Optik} & \longleftrightarrow & \text{Mechanik} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Wellenoptik} & \longleftrightarrow & \text{Wellenmechanik}\,. \end{array}$$

Als Wellenlänge postulierte de Broglie (1923) die Größe

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}\,,$$

(oder auch $p = \hbar k$) abhängig vom Impuls p des Teilchens.

Mechanik

Wir beschränken uns vorerst auf ein Teilchen im $\mathbb{R}^3$ mit der Hamiltonfunktion

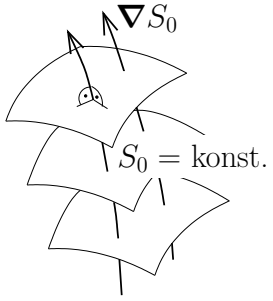
$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}). \tag{8.48}$$

Dann lautet die Hamilton-Jacobi Gleichung

$$(\boldsymbol{\nabla} S_0)^2 = 2m\big(E - V(\boldsymbol{x})\big). \tag{8.49}$$

Jede Lösung dieser Gleichung beschreibt ein Bündel mechanischer Bahnen zur Energie E. Dabei ist der Impuls bestimmt durch

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\nabla} S_0. \tag{8.50}$$



Die Bahnkurven sind somit Orthogonaltrajektorien der Flächen $S_0 = \text{konst}$. Auf jeder dieser Bahnkurven gilt $d\boldsymbol{x}/ds = \dot{\boldsymbol{x}}/(ds/dt) = \boldsymbol{\nabla} S_0/|\boldsymbol{\nabla} S_0|$, d. h.

$$\sqrt{2m(E - V(\boldsymbol{x}))}\,\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{\nabla} S_0, \qquad (s = \text{Bogenlänge}). \tag{8.51}$$

Sie erfüllen damit (8.46). Der Vektor $d\boldsymbol{x}/ds$ ist dabei der Einheitsvektor entlang der Bahn.

Strahlenoptik

Wir schreiben das Prinzip von Fermat (8.47) in der Form

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds\, k(\boldsymbol{x}) = 0, \quad k(\boldsymbol{x}) = \frac{\omega}{c} n(\boldsymbol{x}) \tag{8.52}$$

mit k der Wellenzahl und ω der Kreisfrequenz des Lichtes. Dies entspricht dem Prinzip von Euler-Maupertuis für die Bahnkurven der Energie E im Potential $V(\boldsymbol{x})$, sofern

$$2m(E - V(\boldsymbol{x})) = C^2 k^2(\boldsymbol{x}) \tag{8.53}$$

mit C einer beliebigen Konstanten. Aus der Diskussion in der Mechanik können wir direkt folgendes Resultat übernehmen: Jede Lösung $S_0(\boldsymbol{x})$ der Hamilton-Jacobi Gleichung (vgl. (8.49))

$$(\boldsymbol{\nabla} S_0)^2 = C^2 k^2(\boldsymbol{x}) \tag{8.54}$$

beschreibt ein Bündel von Lichtstrahlen; die Orthogonaltrajektorien der Flächen $S_0(\boldsymbol{x}) = \text{konst}$. Dieses Bündel ist bestimmt durch (vgl. (8.51))

$$Ck(\boldsymbol{x})\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = C\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} S_0\,. \tag{8.55}$$

Die Wahl $C = 1$ ist im Hinblick auf die Wellenoptik zweckmäßig, wie wir gleich sehen werden. In der Optik heißt dann $S_0(\boldsymbol{x})$ das *Eikonal* und (8.54) die *Eikonalgleichung*.

Wellenoptik → Strahlenoptik

In der skalaren Wellenoptik wird monochromatisches Licht beschrieben durch ein komplexes Feld $\psi(\boldsymbol{x},t) = u(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$, das der Wellengleichung (mit $C = 1$)

$$(C^2\Delta + k^2)u = 0 \tag{8.56}$$

genügt. Wir zerlegen

$$u(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x})e^{i\tilde{S}_0(\boldsymbol{x})} \tag{8.57}$$

in die Amplitude A und die Phase $\tilde{S}_0 = S_0/C$. Mit

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}(Ae^{i\tilde{S}_0}) = (\boldsymbol{\nabla}A + iA\boldsymbol{\nabla}\tilde{S}_0)e^{i\tilde{S}_0},\\
&\Delta(Ae^{i\tilde{S}_0}) = \operatorname{div}\boldsymbol{\nabla}(Ae^{i\tilde{S}_0}) = \Big(\Delta A + iA\Delta\tilde{S}_0 + 2i\boldsymbol{\nabla}A\cdot\boldsymbol{\nabla}\tilde{S}_0 - A(\boldsymbol{\nabla}\tilde{S}_0)^2\Big)e^{i\tilde{S}_0}
\end{aligned}$$

folgen aus (8.56) die beiden Gleichungen

$$C^2\Delta A - A(\boldsymbol{\nabla}S_0)^2 + Ak^2 = 0, \qquad A\Delta S_0 + 2\boldsymbol{\nabla}A\cdot\boldsymbol{\nabla}S_0 = 0. \tag{8.58}$$

Die Strahlenoptik, in Form der Eikonalgleichung (8.54) mit $C = 1$, ist somit eine gute Näherung in Gebieten, in denen

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| \ll k^2. \tag{8.59}$$

Grob gesagt bedeutet das, dass die Eikonalnäherung in Gebieten gut ist, in denen sich die Amplitude $A(\boldsymbol{x})$ über eine Wellenlänge $\approx k^{-1} = |\boldsymbol{\nabla}S_0|^{-1}$ wenig ändert. Das Eikonal $S_0(\boldsymbol{x})$ ist dann die Phase der Lichtwelle, und die Lichtstrahlen sind Orthogonaltrajektorien der Flächen konstanter Phase. Das Vektorfeld $\boldsymbol{\nabla}S_0$ beschreibt (vgl. (8.55)) den lokalen Wellenvektor $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) = k(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}/ds$.

Mechanik ← Wellenmechanik (Schrödinger)

Der Ausgangspunkt von Schrödinger war, dass die Hamilton-Jacobi Gleichungen (8.49) für $S_0(\boldsymbol{x})$ die strahlenoptische Näherung einer (mechanischen) Wellengleichung eines skalaren Feldes $u(\boldsymbol{x})$ sein sollen. Der Vergleich von (8.50) mit (8.54) legt nahe, dass einem Teilchen vom Impuls $\boldsymbol{p}$ eine Welle mit dem (de Broglie) Wellenvektor ($C = \hbar$)

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k} \tag{8.60}$$

zugeordnet werden sollte. Die Hamilton-Jacobi Gleichung (8.49)

$$(\boldsymbol{\nabla}S_0)^2 = 2m(E - V(\boldsymbol{x}))$$

ist damit die strahlenoptische Näherung zu (8.56), d. h.

$$\hbar^2\Delta u(\boldsymbol{x}) + 2m(E - V(\boldsymbol{x}))u(\boldsymbol{x}) = 0\,. \tag{8.61}$$

Die Gleichung (8.61) ist die *zeitunabhängige Schrödingergleichung*: Sie beschreibt in der Wellenmechanik Zustände u der Energie E.

Analog ist die zeitabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung für das System (8.48),

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\nabla} S)^2 + V(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{8.62}$$

die strahlenoptische Näherung der Phase $\tilde{S} = S/\hbar$ einer komplexen Welle $\psi(\boldsymbol{x}, t) = A(\boldsymbol{x}, t)e^{iS(\boldsymbol{x},t)/\hbar}$, welche der *zeitabhängigen Schrödingergleichung*

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi \tag{8.63}$$

genügt. Dies ist die *Bewegungsgleichung der Wellenmechanik* für das System (8.48). Sie bestimmt $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ aus dem Anfangszustand $\psi(\boldsymbol{x}, 0)$. Gleichung (8.61) geht aus (8.63) hervor durch den Ansatz

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = u(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} \qquad \text{mit } E = \hbar\omega. \tag{8.64}$$

Für die Phase $S/\hbar$ entspricht dies gerade dem Separationsansatz (8.41).

Die statistische Deutung der Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ stammt von Born (1926): Man normiere $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ (zu einer Zeit t_0) so, dass

$$\int |\psi(\boldsymbol{x}, t_0)|^2 \, d^3x = 1.$$

Dann ist

$$P(\Omega, t) = \int_\Omega |\psi(\boldsymbol{x}, t)|^2 \, d^3x$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen zur Zeit t im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ befindet.

Kapitel 9

Relativistische Mechanik

9.1 Einsteinsches Relativitätsprinzip

Das Michelson-Morley Experiment führte Einstein (1905) dazu neben dem galileischen Relativitätsprinzip, dass die physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen gleich sind, das zusätzliche *einsteinsche Postulat* zu fordern:

> *Die Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen denselben Betrag* $c = 299\,792\,458\ m/s$.

Dieses Prinzip ist die Grundlage der *Speziellen Relativitätstheorie*. Inertialsysteme sind dabei so definiert, dass in ihnen freie Teilchen, wie schon in der klassischen Mechanik, dem Trägheitsgesetz $\ddot{\boldsymbol{x}} = 0$ folgen. Man sieht sofort, dass die Invarianz der physikalischen Gesetze nun nicht mehr unter den Galileitransformationen gefordert werden dürfen, da diese auf die elementaren Geschwindigkeitsadditionsformeln führen. Im Kapitel 9.2 werden wir untersuchen, welche Transformationsgruppe kompatibel mit dem einsteinschen Postulat ist. Wir wollen im Folgenden allerdings zuerst ein paar einfache Konsequenzen aus dem einsteinschen Postulat kennenlernen.

Da wir im Kapitel 1.3 gesehen haben, dass wir bei der Annahme einer absoluten Zeit aus dem Relativitätsprinzip sofort die Galileitransformationen als allgemeine Transformationen zwischen Inertialsystemen folgen, müssen wir den Begriff einer absoluten Zeit aufgeben und fordern, dass im Allgemeinen $t' \neq t$. Der absolute Wert der Lichtgeschwindigkeit ermöglicht es, Uhren 1 und 2 in zwei Bezugsystemen S und S' zu synchronisieren und somit zumindest zum Teil eine gemeinsame Zeit einzuführen. Das Protokoll für die Synchronisation zweier Uhren in zwei verschiedenen Inertialsystemen S und S', welche die Zeit durch denselben periodischen Vorgang messen, ist das folgende: Wir stellen wir uns vor, dass im Bezugssystem S ein Lichtblitz von der Uhr 1 zur Zeit t_0 ausgesandt wird. Der Strahl wird von der Uhr 2 (ruhend im System S') reflektiert, und zur Zeit $t_0 + \Delta t$ von der Uhr 1 detektiert. Da die Lichtgeschwindigkeit absolut ist, können wir den Zeitpunkt des Eintreffens

des Lichtstrahls bei der Uhr 2 mit der Zeit $t_0 + \Delta t/2$ im System S identifizieren und damit die Uhren synchronisieren. Weiterhin erlaubt uns die Universalität der Lichtgeschwindigkeit, Längenmessungen auf Zeitmessungen zurückzuführen und den Meter als den 1/299792458-ten Teil der Strecke zu definieren, welche ein Lichtstrahl in einer Sekunde zurücklegt. Das Problem der Synchronisation der Uhren ist, dass das Vorgehen nicht transitiv ist. Wenn die Uhren 1 und 2 synchron und außerdem 2 und 3 synchron sind, dann folgt damit nicht, dass auch 1 und 3 synchron sind. Dies führt uns auf den Begriff der *Relativität der Gleichzeitigkeit.*

Relativität der Gleichzeitigkeit: Aus der absoluten Zeit in der galileischen Raumzeit folgt, dass zwei Ereignisse, welche gleichzeitig im Bezugssystem S' geschehen, auch gleichzeitig in S stattfinden. Diese Tatsache ist inkompatibel mit dem einsteinschen Postulat der Universalität der Lichtgeschwindigkeit. Um dies zu sehen, betrachten wir zwei Bezugssysteme, welche sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{w} = (w, 0, 0)$, $w > 0$ gegeneinander bewegen. Wir betrachten drei Uhren A, B, C auf der 1-Achse, welche in S' ruhen. Die Uhr B befindet sich zwischen den Uhren A und C, so dass der Abstand von A zu B gleich dem Abstand von B zu C ist. Ein Beobachter im System S' wird feststellen, dass ein Lichtblitz, welcher zur Zeit t'_{B} von B ausgesandt wird, gleichzeitig ($t'_{\mathrm{A}} = t'_{\mathrm{C}}$) bei A und C eintrifft.

Aus der Sicht eines Beobachter im (bewegten) System S wird der Lichtblitz zur Zeit t_{B} von B emittiert und breitet sich auch mit c in alle Richtungen aus. Da sich A zum Lichtblitz hin und C vom Lichtblitz wegbewegt, gilt aus der Sicht von S die Ungleichung $t_{\mathrm{A}} < t_{\mathrm{C}}$. Somit sind Uhren, welche im System S' synchronisiert sind, im System S nicht synchronisiert und daher hängt der Begriff der „Gleichzeitigkeit“ vom Bezugssystem ab. Die Abwesenheit eines absoluten Gleichzeitigkeitsbegriffs ist die Ursache für viele der zunächst paradox erscheinenden Konsequenzen des Relativitätsprinzips.

9.2 Lorentztransformation

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass das einsteinsche Postulat, welches durch das Michelson-Morley Experiment gestützt wird, uns zwingt, unsere Vorstellungen von Zeit und Raum zu überdenken. Insbesondere müssen wir uns von dem Begriff einer absoluten Zeit verabschieden. Wir wollen in diesem Kapitel das einsteinsche Postulat zu einer mathematischen Theorie entwickeln, welche es uns erlaubt, neue Naturgesetze aufzustellen, welche mit dem einsteinschen Postulat kompatibel sind. Dazu müssen wir uns zuerst überlegen, was die neuen Transformationen zwischen Inertialsystemen sind.

Ähnlich wie die Galileitransformationen die newtonschen Gleichungen invariant lassen, sind die *Lorentztransformationen* die Gruppe der Transformationen, welche zwischen Systemen wechseln, die dem einsteinschen Postulat genügen. Insofern erlauben die

Lorentztransformationen in der Speziellen Relativitätstheorie aus einem Inertialsysteme in ein beliebiges anderes Inertialsystem zu wechseln. Danach verbleibt die Aufgabe eine relativistische (d. h. lorentzinvariante) Formulierung der Mechanik zu finden, welche wir im nächsten Kapitel abarbeiten werden.

9.2.1 Transformation zwischen Inertialsystemen

Zunächst erscheint es so, als ob das einsteinsche Postulat dem Trägheitsgesetz widerspricht. Dieses „Gefühl“ ist allerdings der Tatsache geschuldet, dass wir fest in unserem klassischen Bild der Welt verwurzelt sind und das einsteinsche Postulat, wie im letzten Kapitel gesehen, einhergeht mit dem Verlust des absoluten Begriffes der Gleichzeitigkeit und daher zur Einführung einer Zeit pro Bezugssystem führt. Um die Gruppe der Lorentztransformationen zu erhalten, betrachten wir zwei Inertialsysteme S und S', welche sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}$ relativ zueinander bewegen.

Wir betrachten einen Lichtblitz, der bei $(t_1, \boldsymbol{x}_1)$ ausgesendet wird und später bei $(t_2, \boldsymbol{x}_2)$ eintrifft. Wegen dem einsteinschen Postulat gilt sowohl

$$(\Delta\boldsymbol{x})^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0 \qquad \text{als auch} \qquad (\Delta\boldsymbol{x}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = 0 \tag{9.1}$$

mit $\Delta t = t_2 - t_1$ und $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$. Die Bewegungen eines kräftefreien Teilchens in einem Intertialsystem sind gegeben durch Geraden. Aus der Forderung, dass eine Lorentztransformation Intertialsysteme aufeinander abbilden soll, folgt mit dem Trägheitsgesetz $\ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot{\boldsymbol{x}}' = 0$; somit werden Geraden auf Geraden abbildet. Damit ist eine Lorentztransformation eine lineare Abbildung von $(\Delta t, \Delta\boldsymbol{x})$ auf $(\Delta t', \Delta\boldsymbol{x}')$. Aufgrund der Linearität der Transformation ist (9.1) äquivalent zu[1]

$$(\Delta\boldsymbol{x}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = \kappa(\boldsymbol{w})[(\Delta\boldsymbol{x})^2 - c^2(\Delta t)^2]. \tag{9.2}$$

Betrachten wir nun noch ein weiteres Bezugssystem S'', welches sich mit der Geschwindigkeit $-\boldsymbol{w}$ relativ zu S' bewegt. Dann erhalten wir

$$(\Delta\boldsymbol{x}'')^2 - c^2(\Delta t'')^2 = \kappa(-\boldsymbol{w})\kappa(\boldsymbol{w})[(\Delta\boldsymbol{x})^2 - c^2(\Delta t)^2].$$

Da S'' relativ zu S ruht ist $\Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{x}''$ und $\Delta t = \Delta t''$, woraus folgt dass $\kappa(-\boldsymbol{w})\kappa(\boldsymbol{w}) = 1$. Wegen der Isotropie des Raumes darf $\kappa(\boldsymbol{w})$ zudem nicht von der Richtung der relativen Bewegung sondern nur vom Betrag w abhängen. Daraus können wir schließen, dass $\kappa(-\boldsymbol{w})\kappa(\boldsymbol{w}) = \kappa(w)^2 = 1$ und somit $\kappa(w) = 1$.[2]

Die Resultate lassen sich am besten zusammenfassen indem man Ort und Zeit zu den *4er-Koordinaten*

$$x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \boldsymbol{x}) \tag{9.3}$$

[1] Eine lineare Abbildung bildet ein homogenes Polynom vom Grad 2 auf ein homogenes Polynom vom Grad 2 ab. Da $(\Delta\boldsymbol{x})^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta\boldsymbol{x}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = 0$ folgt aus der Homogenität sofort (9.2).

[2] Die alternative Lösung $\kappa(w) = -1$ kann verworfen werden, da $\kappa = 1$ bei $w = 0$.

eines Teilchens zusammenfasst. Damit sind die Lorentztransformationen dadurch definiert, dass sie das Quadrat des Abstandes

$$\Delta s^2 = \big(\Delta x', \Delta x'\big) = \big(\Delta x, \Delta x\big) = \eta_{\mu\nu}(\Delta x)^\mu(\Delta x)^\nu \tag{9.4}$$

invariant lassen, mit der Minkowski-Metrik

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Wir verwenden die *einsteinsche Summenkonvention*: doppelt auftretende Indizes werden über $\{0, 1, 2, 3\}$ summiert.

Eine allgemeine affine Transformation zwischen den Bezugsystemen S und S' kann geschrieben werden als $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ mit $a \in \mathbb{R}^4$ und $\Lambda \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$. Die Bedingung (9.4) führt auf die Einschränkung

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta(\Delta x)^\alpha(\Delta x)^\beta = \eta_{\mu\nu}(\Delta x')^\mu(\Delta x')^\nu = \eta_{\mu\nu}(\Delta x)^\mu(\Delta x)^\nu$$

was äquivalent ist zu

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}\,, \tag{9.6}$$

oder in Matrixnotation $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$.[3] Transformationen, welche die Bedingung (9.6) erfüllen, nennt man Elemente der *Lorentzgruppe*, welche man mit $L = \mathrm{O}(1, 3)$ bezeichnet. Die Gruppe der Transformationen, welche Inertialsysteme mit festen Maßstäben verbinden, ist die Gruppe der inhomogenen Lorentztransformationen mit $x' = \Lambda x + a$, auch *Poincarégruppe* genannt. Man bezeichnet Vektoren v, welche sich mit dem homogenen Anteil der Poincarégruppe, d. h. wie $v' = \Lambda v$, transformieren als *kontravariante Vierervektoren*.

9.2.2 Lorentzgruppe

Wir betrachten ein Element $\Lambda \in L$. Aus der Relation (9.6) lassen sich eine Reihe von Eigenschaften von Λ ableiten. Bildung der Determinanten liefert sofort $(\mathrm{Det}\,\Lambda)^2 = 1$. Somit zerfällt L in zwei Komponenten charakterisiert durch $\mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$. Zudem erhält man für die (00)-Komponenten die Eigenschaft $(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^3(\Lambda^k{}_0)^2 = 1$, d. h. $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$. Die Lorentzgruppe hat damit zwei disjunkte Komponenten charakterisiert durch das Vorzeichen von $\Lambda^0{}_0$.

[3] Die Inverse von Λ erhält man durch Multiplikation von links mit η und von rechts mit Λ^{-1} als $\Lambda^{-1} = \eta\Lambda^t\eta$.

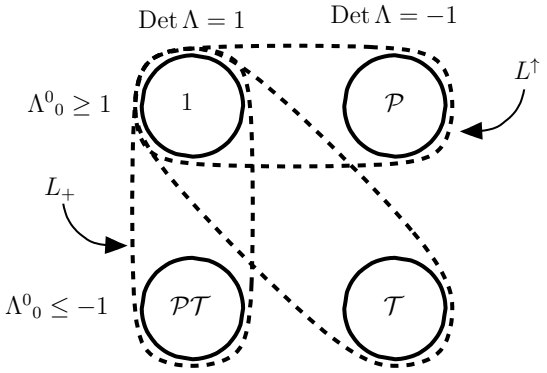


Abbildung 9.1: Struktur der Lorentzgruppe: die Lorentzgruppe L zerfällt in vier disjunkte Komponenten charakterisiert durch $\mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$ und $\mathrm{sgn}(\Lambda^0{}_0)$.

Dass alle vier Fälle auftreten, zeigen die Spiegelungen

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{9.7}$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{PT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{9.8}$$

mit $\mathcal{P}$ der Spiegelung am Koordinatenursprung (Parität) und $\mathcal{T}$ der Zeitumkehr. Die Spiegelungen bilden eine Untergruppe von L. Weitere Untergruppen sind zum Beispiel

$$\begin{aligned} L_+ &= \{\Lambda \in L \mid \mathrm{Det}\,\Lambda = 1\}, && \text{die eigentlichen Lorentztransformationen,} \\ L^\uparrow &= \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0{}_0 \geq 1\}, && \text{die orthochronen Lorentztransformationen,} \\ L_+^\uparrow &= L_+ \cap L^\uparrow. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Eine Lorentztransformation bildet nach Definition den Lichtkegel mit $\Delta s^2 = 0$ auf sich selbst ab. Vierervektoren auf dem Lichtkegel mit $(v, v) = 0$ bezeichnet man auch als *Nullvektoren*, siehe Abbildung 9.2. Wir definieren außerdem Vektoren, welche in das Äußere des Lichtkegels zeigen als *raumartige* Vektoren v mit $(v, v) < 0$ und solche die in das Innere des Lichtkegels zeigen als *zeitartige* Vektoren mit $(v, v) > 0$. Zeitartige Vektoren kann man zusätzlich unterteilen in Vektoren, welche in die zeitartige Zukunft zeigen ($v^0 > 0$) und solche die in die zeitartige Vergangenheit zeigen ($v^0 < 0$).

Dass $L^\uparrow$ eine Gruppe ist, sieht man geometrisch. Eine Lorentztransformation $\Lambda \in L$ bildet das Innere des Lichtkegels auf sich ab. Dabei bleiben die beiden Teilkegel

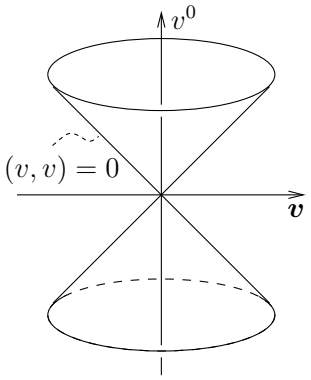


Abbildung 9.2: Vektoren auf dem Lichtkegel mit $(v,v)=0$ bezeichnet man als Nullvektoren. Außerhalb des Lichtkegels befinden sich die raumartigen Vektoren. Die zeitartigen Vektoren im Inneren des Kegels zerfallen in zwei Komponenten abhängig davon, ob sie in die Zukunft (oben) oder die Vergangenheit (unten) zeigen.

(Zukunft und Vergangenheit) $V^{\pm}=\{x \mid (x,x)>0, \pm x^0 \geq 0\}$ entweder invariant oder werden vertauscht. Entscheidend dafür ist das Vorzeichen $\mathrm{sgn}(\Lambda^0{}_0)$, da $[\Lambda(1,\mathbf{0})]^0 = \Lambda^0{}_0$. Damit verhalten sich $\mathrm{sgn}(\Lambda^0{}_0)$ und natürlich auch $\mathrm{Det}\,\Lambda$ multiplikativ[4] unter der Gruppenverknüpfung. Die orthochronen Transformationen $L^{\uparrow}$ bilden die Zukunft auf die Zukunft und die Vergangenheit auf die Vergangenheit ab.

Aufgrund der Multiplizität von $\mathrm{sgn}(\Lambda^0{}_0)$ und $\mathrm{Det}\,\Lambda$ kann jedes $\Lambda \in L$ als das Produkt eines Elements der eigentlich-orthochronen Lorentzgruppe $L^{\uparrow}_{+}$ mit einer Spiegelung $\{1, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}$ geschrieben werden. Wir beschränken uns deshalb im folgenden auf die eigentlich-orthochrone Untergruppe.

Eigentlich-orthochrone Lorentzgruppe Die 4×4-Matrix Λ hat insgesamt 16 reelle Einträge. Die Gleichung (9.6) liefert 10 unabhängige Gleichungen.[5] Daher werden Elemente $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$ durch 6 reelle Parameter bestimmt.

Drei der Parameter können wir mit den dreidimensionalen Rotationen identifizieren. In der Tat gilt mit

$$\Lambda(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \tag{9.10}$$

sofort $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ wobei $R \in \mathrm{SO}(3)$ mit $R^t R = 1$. Damit bilden die Rotationen $\Lambda(R)$ eine Untergruppe von $L^{\uparrow}_{+}$.

Von größerem Interesse sind die verbleibenden drei-parametrigen Transformationen, von denen wir erwarten, dass sie gegeneinander bewegte Bezugssysteme verknüpfen. Dazu untersuchen wir, ob spezielle Lösungen mit der Blockform

[4] Das Letztere folgt aus der allgemeinen Relation $\mathrm{Det}(AB) = (\mathrm{Det}\,A)(\mathrm{Det}\,B)$ für beliebige quadratische Matrizen A und B.

[5] Transponieren von (9.6) führt auf dasselbe Gleichungssystem. Daher sind nur 10 von den 16 Gleichungen unabhängig.

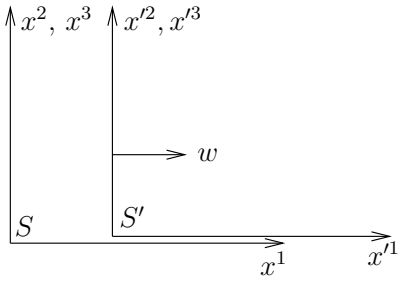


Abbildung 9.3: Zusammenhang der Systeme S und S' unter einem Boost entlang der 1-Achse.

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{9.11}$$

existieren, d. h. x^2, x^3 werden nicht transformiert. Einsetzen in (9.6) liefert die Bedingungen

$$a^2 - c^2 = 1, \qquad ab - cd = 0, \qquad b^2 - d^2 = -1.$$

Da wir nur an Lösungen aus $L_+^\uparrow$ interessiert sind, fordern wir zudem $a > 0$ und $ad - bc = 1$.

Die erste Gleichung können wir erfüllen, indem wir den Parameter χ mit $a = \cosh\chi$ und $c = -\sinh\chi$ einführen. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $b = cd/a$. Einsetzen in $ad - bc = 1$ liefert $1 = d/a$, d. h. $d = \cosh\chi$ und $b = -\sinh\chi$. Damit erhalten wir die speziellen Lorentztransformationen (Boosts)

$$\Lambda(\chi) = \left(\begin{array}{cc|cc} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \exp\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\chi & 0 \\ -\chi & 0 & \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{9.12}$$

Aus der letzten Identität folgt sofort, dass die Boosts eine Untergruppe bilden mit dem Multiplikationsgesetz

$$\Lambda(\chi_1 + \chi_2) = \Lambda(\chi_1)\Lambda(\chi_2). \tag{9.13}$$

Daraus lässt sich direkt folgern, dass $\Lambda(\chi)^{-1} = \Lambda(-\chi)$.

Als nächstes wollen wir die physikalische Bedeutung von $\Lambda(\chi)$ erläutern. Dafür schreiben wir das Transformationsgesetz $x = \Lambda(\chi)^{-1}x'$ eines Boosts in Komponenten

$$\begin{aligned} ct &= (\cosh\chi)ct' + (\sinh\chi)x'^1, & x^2 &= x'^2, \\ x^1 &= (\sinh\chi)ct' + (\cosh\chi)x'^1, & x^3 &= x'^3. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Ein Objekt, welches im S'-System am Ort $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(t')$ ruht, bewegt sich daher im System S mit der Geschwindigkeit[6]

$$w = \frac{dx^1}{dt} = \frac{dx^1}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{dx^1}{dt'}\left(\frac{dt}{dt'}\right)^{-1} = c\tanh\chi\,. \tag{9.15}$$

Damit erhalten wir die Interpretation, dass $\Lambda(\chi)$ auf ein neues Inertialsystem transformiert, welches sich mit der Geschwindigkeit w entlang der 1-Achse relativ zu S bewegt, siehe Abbildung 9.3. Einfache hyperbolische Beziehungen liefern die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\cosh\chi &= \frac{1}{\sqrt{1-\tanh\chi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(w/c)^2}} \equiv \gamma,\\ \sinh\chi &= \tanh\chi\cosh\chi = \frac{w/c}{\sqrt{1-(w/c)^2}} = \gamma w/c.\end{aligned} \tag{9.16}$$

Aus (9.14) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + wx'^1/c^2), & x^2 &= x'^2,\\ x^1 &= \gamma(x'^1 + wt'), & x^3 &= x'^3. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Für $w/c \to 0$ erhalten wir als Grenzverhalten die Galileitransformation

$$t = t', \quad x^1 = x'^1 + wt, \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3.$$

Eine Transformation in ein System S', das sich mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}$ in eine beliebige Raumrichtung gegen S bewegt, kann man grundsätzlich durch eine Verkettung einer Rotation (so dass $\boldsymbol{w}'$ entlang der 1-Richtung ist), eines Boosts und einer Rückrotation erhalten. Viel einfacher ist allerdings die Idee, dass man den Vektor $\boldsymbol{x}$ in eine Komponente $\boldsymbol{x}_\parallel$ entlang $\boldsymbol{w}$ und einer Komponente $\boldsymbol{x}_\perp$ orthogonal dazu aufspalten kann. Analog zu (9.17) erhält man dann

$$t = \gamma(t' + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}'_\parallel)/c^2), \qquad \boldsymbol{x}_\parallel = \gamma(\boldsymbol{x}'_\parallel + \boldsymbol{w}t'), \qquad \boldsymbol{x}_\perp = \boldsymbol{x}'_\perp. \tag{9.18}$$

Damit hängt ein Boost $x' = \Lambda(\boldsymbol{w})x$ im Allgemeinen von den drei reellen Parametern $\boldsymbol{w}$ ab. Die Lorentztransformationen werden für $w \to c$ singulär. Die Lichtgeschwindigkeit stellt eine Maximalgeschwindigkeit dar. Kein Objekt (und auch keine Information) kann sich schneller als Licht bewegen.

9.2.3 Addition von Geschwindigkeiten

Es ist unmittelbar klar, dass die galileische Geschwindigkeitsaddition $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}'$ zu Widersprüchen mit der Absolutheit der Lichtgeschwindigkeit führt. Diese verlangt nämlich, dass mit $|\boldsymbol{v}| = c$ auch $|\boldsymbol{v}'| = c$ ist, unabhängig von $\boldsymbol{w}$. Die relativistischen

[6] In der Literatur wird $\chi = \operatorname{artanh}(w/c)$ als Rapidität bezeichnet.

Formeln für die Geschwindigkeitsaddition lassen sich unmittelbar aus den Gleichungen (9.18) für einen allgemeinen Boost herleiten. Wir führen zwei (achsenparallele) Bezugsysteme S und S' ein, dessen Koordinaten durch (9.18) verknüpft sind (d. h. sie bewegen sich mit $\boldsymbol{w}$ relativ zueinander). Betrachten wir nun ein Objekt, welches sich auf der Bahn $\boldsymbol{x}'(t') = \boldsymbol{x}'_0 + \boldsymbol{v}'t'$ in S' bewegt. Dasselbe Objekt wird sich im System S auf der Bahn $\boldsymbol{x}(t)$ bewegen. In 4er Notation haben wir die Koordinaten $x(t) = (ct, \boldsymbol{x}(t))$ und $x'(t') = (ct', \boldsymbol{x}'(t'))$, welche durch $x' = \Lambda(\boldsymbol{w})x$ verknüpft sind. Mit der allgemeinen Formel (9.18) für einen Boost, erhalten wir

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma(1 + (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}'_\parallel)/c^2) = \gamma(1 + (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}')/c^2)$$

und

$$\frac{d\boldsymbol{x}_\parallel}{dt'} = \gamma(\boldsymbol{v}'_\parallel + \boldsymbol{w}),$$
$$\frac{d\boldsymbol{x}_\perp}{dt'} = \boldsymbol{v}'_\perp$$

Das Objekt bewegt sich daher im System S mit der Geschwindigkeit (*Addition der Geschwindigkeiten*)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d(\boldsymbol{x}_\parallel + \boldsymbol{x}_\perp)}{dt} = \frac{\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}'_\parallel + \boldsymbol{v}'_\perp\sqrt{1 - (w/c)^2}}{1 + (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}')/c^2}. \tag{9.19}$$

Den inversen Zusammenhang bekommt man, indem man $\boldsymbol{w}$ durch $-\boldsymbol{w}$ ersetzt. Im Grenzfall, dass $|\boldsymbol{w}|, |\boldsymbol{v}'| \ll c$ erhält man, wie gewünscht, die nichtrelativistischen Formel $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}'$.

9.3 Relativistische Mechanik

Wie wir gesehen haben, ist die newtonsche Mechanik nicht mit dem Relativitätspostulat verträglich. In der speziellen Relativitätstheorie müssen wir daher die Gesetze der Mechanik *kovariant* (d. h. invariant unter Lorentztransformationen machen). Als Nebenbedingung sollte sich im Grenzfall $|\dot{\boldsymbol{x}}| \ll c$ die alte Mechanik wiederfinden.

9.3.1 Vierergeschwindigkeit

Die Bewegung eines Teilchens wird durch die Bahnkurve $\boldsymbol{x}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ festgelegt. In relativistischer Schreibweise wird die Bahn zu einer Weltlinie

$$x(\lambda) = (ct(\lambda), \boldsymbol{x}(t(\lambda))) \tag{9.20}$$

mit λ einem beliebigen Parameter, welcher die Weltlinie parametrisiert, siehe Abbildung 9.4. Wie im Kapitel 9.2 erläutert, werden Transformationen zwischen verschiedenen Intertialsystemen von einer Poincarétransformation Λ mit $x' = \Lambda x + a$ geleistet.

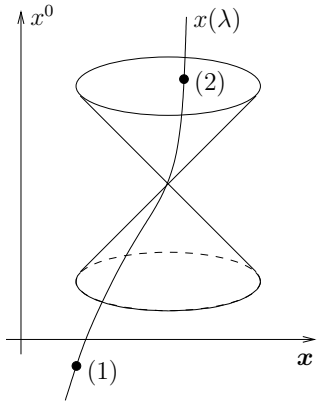


Abbildung 9.4: Weltlinie eines Teilchens parametrisiert durch λ. Die Bewegung findet statt zwischen den Ereignissen $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$.

Man möchte nun gerne den Begriff der Geschwindigkeit auf einen Vierervektor verallgemeinern. Um das zu erreichen, muss $x(\lambda)$ durch einen Lorentzskalar τ parametrisiert werden, welcher im Grenzfall $|\boldsymbol{v}| \ll c$ mit der Zeit übereinstimmt. Aufgrund der Invarianz des Abstandes (9.4), bildet die Eigenzeit (startend von einer beliebigen Zeit $t^{(1)}$)

$$\tau(t^{(2)}) = \frac{1}{c}\int_{(1)}^{(2)} ds = \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu}/c = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt\, \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2(t)/c^2} \tag{9.21}$$

zwischen den Ereignissen $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ gerade ein Lorentzskalar, d. h. τ ist unabhängig vom Bezugssystem. Um die Parametrisierung in (9.20) Bezugssystem unabhängig zu machen, ist es daher oft sinnvoll $\lambda = \tau$ zu setzen indem man $\tau(t)$ aus (9.21) nach t auflöst. Die Ableitung der Weltlinie nach der Eigenzeit ergibt den kontravarianten Vierervektor,

$$u(\tau) \equiv \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d(ct, \boldsymbol{x}(t))}{dt} = \gamma(t)(c, \boldsymbol{v}(t)) \tag{9.22}$$

mit $\gamma(t) = (1 - \boldsymbol{v}^2/c^2)^{-1/2}$, welchen wir als *Vierergeschwindigkeit* bezeichnen. Für das Quadrat der „Länge“ des Vierervektors gilt $(u, u) = \gamma^2(c^2 - \boldsymbol{v}^2) = c^2$. Damit ist u immer auf c normiert und nur 3 Parameter sind unabhängig.

9.3.2 Energie-Impuls Beziehung

Mit der Vierergeschwindigkeit können wir unmittelbar den Impuls $\boldsymbol{p}$ zu einem kontravarianten Viererimpuls

$$p \equiv (p^0, \boldsymbol{p}) = mu = \gamma m(c, \boldsymbol{v}) \tag{9.23}$$

verallgemeinern. Im nichtrelativistischen Grenzfall $|\boldsymbol{v}| \ll c$, $\gamma \to 1$, stimmen die räumlichen Komponenten von p^μ mit dem nichtrelativistischen Impuls überein. Der räumliche Anteil bleibt daher für ein kräftefreies Teilchen in einem Inertialsystem erhalten. Da p^μ ein kontravarianter Vierervektor ist, bleibt daher der komplette Viererimpuls p^μ in jedem Inertialsystem erhalten. Analog kann man schließen, dass

der Gesamtimpuls $P^\mu = \sum_{j=1}^{N} (p_j)^\mu$ von N Teilchen mit den Viererimpulsen p_j in jedem Inertialsystem erhalten bleibt.

Die Frage ist nun, welcher Erhaltungsgröße die Zeitkomponente p^0 in der nichtrelativistischen Physik entspricht. Entwickelt man p^0 nach $|\boldsymbol{v}|/c$ ergibt sich

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}} = mc + \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2/c + \cdots \tag{9.24}$$

Man erkennt sofort, dass $p^0 c$ bis auf die Konstante mc^2 mit der kinetischen Energie T der newtonschen Mechanik übereinstimmt. Damit ist die (relativistische) *kinetische Energie* E gegeben durch

$$E = p^0 c = E_0 + T \quad \text{mit} \quad E_0 = mc^2. \tag{9.25}$$

Die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ ist gerade Einsteins berühmte Formel. Die relativistische Energie enthält im Gegensatz zur nichtrelativistischen Physik einen Ruheenergiebeitrag, der nur von der Masse des Objektes abhängt. Anders als in der nichtrelativistischen Physik, kann Masse in der Relativitätstheorie vernichtet werden und die entsprechende Energie in andere Energieformen umgewandelt werden.

Betrachten wir als Beispiel den (symmetrischen) Zerfall eines Teilchens in zwei Teile. Im Ruhesystem des Teilchens hat man am Anfang den Viererimpuls $P = (Mc, \mathbf{0})$ mit M der Gesamtmasse des Teilchens.

Nach dem symmetrischen Zerfall ist der Gesamtimpuls P zusammengesetzt aus dem Impuls zweier Teilchen mit Masse m, welche sich mit der Geschwindigkeit $\pm\boldsymbol{v}$ bewegen. Die Teilchen haben die Viererimpulse $\gamma m(c, \pm\boldsymbol{v})$ mit $\gamma = (1 - \boldsymbol{v}^2/c^2)^{-1/2}$, welche sich zum Gesamtimpuls $P = 2\gamma m(c, 0)$ addieren. Aus der Erhaltung des Viererimpulses können wir nun folgern, dass

$$2m = M\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2} < M, \tag{9.26}$$

d. h. die Gesamtmasse ist nicht erhalten. Die Ruheenergie des Massendefekts ist gerade gegeben durch

$$(M - 2m)c^2 = 2mc^2(\gamma - 1) = 2\frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2 + \cdots \tag{9.27}$$

und daher für $|\boldsymbol{v}| \ll c$ gleich der nichtrelativistischen Energie der Zerfallsprodukte. Beim Zerfall des Teilchens wird daher Ruheenergie in kinetische Energie der Zerfallsprodukte umgewandelt.

Aus der Tatsache dass $(u, u) = c^2$, erhält man die relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$(p, p) = \eta_{\mu\nu}\, p^\nu\, p^\mu = (E/c)^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2 c^2, \tag{9.28}$$

welche nach Konstruktion in allen Inertialsystemen gilt.

9.3.3 Bewegungsgleichung

Mit dieser Vorarbeit ist es nun möglich, die Mechanik lorentzinvariant zu formulieren. Am einfachsten geschieht dies mit dem Lagrange Formalismus. In diesem Formalismus ordnet man jeder Weltlinie $x(\lambda)$ eine Wirkung

$$S[x(\lambda)] = \int_{(1)}^{(2)} d\lambda\, L(x, \partial_\lambda x, \lambda) \tag{9.29}$$

zu mit L der Lagrangefunktion. Das hamiltonische Prinzip verlangt, dass die Bahn eines Teilchens charakterisiert ist durch ein Extremum der Wirkung bei festgehaltenen Endpunkten im $\mathbb{R}^4$. Aus der invarianten Bedingung $\delta S = 0$ an die Bahn ist direkt ersichtlich, dass die Bewegungsgleichung kovariant wird, solange die Wirkung S ein Lorentzskalar ist.[7]

Kräftefreies Teilchen

In der nichtrelativistischen Mechanik wird ein kräftefreies Teilchen durch die Lagrangefunktion $L_0 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ beschrieben. Für eine relativistische Verallgemeinerung der Bewegungsgleichungen eines kräftefreien Teilchens benötigen wir eine Wirkung, welche ein Lorentzskalar ist und im Grenzfall $|\boldsymbol{v}| \ll c$ das nichtrelativistische Verhalten reproduziert. Wie wir in (9.21) gesehen haben, ordnet die Eigenzeit einer Weltlinie gerade ein Lorentzskalar zu. Ein natürlicher Ansatz ist daher $S_0 = -mc^2\tau$, wobei der Vorfaktor E_0 gerade so gewählt wurde, dass S_0 die Einheit einer Wirkung hat. In der Tat erhalten wir

$$S_0 = -mc^2\tau = -mc^2 \int_{(1)}^{(2)} dt\, \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2} = \int_{(1)}^{(2)} dt \left(-mc^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + \cdots\right),$$

so dass die relativistische Lagrangefunktion

$$L_0 = -mc^2\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2} \tag{9.30}$$

im Grenzfall $|\boldsymbol{v}| \ll c$ bis auf die Konstante mc^2 gerade mit der nichtrelativistischen Lagrangefunktion eines kräftefreien Teilchens übereinstimmt. Die relativistischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0 \tag{9.31}$$

erhält man als Euler-Lagrange Gleichungen zu L_0. In dieser Form ist es allerdings nicht direkt ersichtlich, dass die Gleichung (9.31) kovariant ist. Um die Kovarianz explizit zu machen, bemerken wir, dass wegen der Energie-Impuls Beziehung (9.28)

[7] Im Prinzip können sich die Wirkungen in den verschiedenen Inertialsystemen auch um einen Faktor unterscheiden.

mit (9.31) auch $\dot{p}^0$ festgelegt wird. In der Tat erhalten wir durch Ableitung von (9.28) nach t

$$c\frac{dp^0}{dt} = c\frac{\boldsymbol{p}}{p^0}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0, \tag{9.32}$$

so dass wir die (manifest-)kovariante Gleichung $dp^\mu/d\tau = 0$ finden.

Teilchen in einem Potential

In der galileischen Physik betrachtet man oft ein Teilchen in einem skalaren Potential $V(\boldsymbol{x}, t)$. Das entsprechende Problem ist in der relativistischen Mechanik nicht wirklich zielführend. Das Problem ist, dass startend von einem skalaren Potential V, das Potential in einem anderen Bezugssystem automatisch auch von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ abhängig wird. Deshalb ist es besser direkt von einem Vektorpotential zu starten, dass an die Geschwindigkeit koppelt. Ein weiterer Punkt ist, dass es gar keine physikalische Kraft gibt, welche durch ein skalares Potential beschrieben werden kann, da die Gravitationskraft nicht kovariant formuliert ist und daher nur die elektrodynamische Kraft in das relativistische Konzept passt. Die Elektrodynamik kommt direkt mit einem Skalar- $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ und einem Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$. Die Wirkung der elektrodynamischen Felder auf ein Teilchen mit Ladung e wird in der klassischen Mechanik beschrieben durch die Lagrangefunktion, siehe (4.39),

$$L = L_0 + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - e\varphi = L_0 - \frac{e}{c}\eta_{\mu\nu}\,u^\mu A^\nu\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}\,. \tag{9.33}$$

mit $A = (\varphi, \boldsymbol{A})$. Ersetzt man nun die freie Lagrangefunktion $L_0 = m\boldsymbol{v}^2/2$ durch die relativistische Verallgemeinerung (9.30), sieht man, dass die Wirkung

$$S = \int_{(1)}^{(2)} dt\, L = -\int_{(1)}^{(2)} d\tau \left(mc^2 + \frac{e}{c}(u, A)\right) \tag{9.34}$$

schon kovariant ist, falls A^μ wie ein Vierervektor transformiert.[8]

Die Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld sind die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right), \tag{9.35}$$

zu (9.34), denn an der nicht-relativistischen Rechnung von Kapitel 4.4 ist lediglich

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} = m\boldsymbol{v} \quad\mapsto\quad -mc^2\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} \tag{9.36}$$

[8] Diese Tatsache wird in der Elektrodynamik bewiesen werden.

zu ersetzen, d. h. $m\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{p}$. Durch (9.35) ist auch dp^0/dt bestimmt. Die Ableitung von (9.28) nach t liefert

$$c\frac{dp^0}{dt} = c\frac{\boldsymbol{p}}{p^0} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}\,. \tag{9.37}$$

Dies ist der Energiesatz, denn rechts steht die Leistung der Lorentzkraft und links die Änderung der kinetischen Energie.

Notation

$\boldsymbol{x}_i$	kart. Koordinaten des i-ten Teilchens in Inertialsystem
$\boldsymbol{y}_i$	körperfeste Koordinaten des i-ten Teilchens
$\dot{\square}$	Zeitableitung
q^α	(verallgemeinerte) Lagekoordinaten
p_α	(verallgemeinerte) Impulse
x_i	Koordinaten im Phasenraum
$\{\cdot,\cdot\}$	Poissonklammer
$\boldsymbol{X}$	Schwerpunkt
$\boldsymbol{P}$	Gesamtimpuls
$\boldsymbol{F}$	Kraft
$\boldsymbol{L}$	Drehimpuls mit Länge $l = \lvert\boldsymbol{L}\rvert$
$\boldsymbol{M}$	Drehmoment
$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit in körperfesten Koordinaten
Θ	Trägheitsmoment
$\boldsymbol{S}$	Drehimpuls in körperfesten Koordinaten
d^3y	infinitesimales Volumenelement
E	(Gesamt-)Energie
T	kinetische Energie
V	Potential, potentielle Energie
$L(q,\dot{q},t)$	lagrangesche Funktion
$H(q,p,t)$	hamiltonsche Funktion
S	Wirkung
$S_0 = S + Et$	verkürzte Wirkung