

# Spezielle Relativitätstheorie

Fabian Hassler

2024

Prof. Dr. Fabian Hassler  
Institut für Quanteninformationstheorie  
RWTH Aachen

Tipp- und sonstige Fehler bitte [F. Hassler](#) mitteilen.  
Dieses Werk steht unter der Lizenz [CC BY-NC 4.0](#).

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Relativitätsprinzip</b>	<b>1</b>
1.1	Galileisches Relativitätsprinzip . . . . .	2
1.1.1	Inertialsystem . . . . .	3
1.1.2	Galilei-Transformation . . . . .	3
1.1.3	Kovarianz der newtonschen Gleichungen . . . . .	3
1.2	Einsteinsches Relativitätsprinzip . . . . .	5
1.2.1	Michelson-Morley-Experiment . . . . .	5
1.2.2	Einsteinsches Postulat . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Lorentz-Transformation</b>	<b>11</b>
2.1	Transformation zwischen Inertialsystemen . . . . .	11
2.2	Lorentz-Gruppe . . . . .	13
2.2.1	Eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe . . . . .	15
2.3	Struktur der Poincaré-Gruppe . . . . .	17
2.4	Addition von Geschwindigkeiten . . . . .	18
2.5	Minkowski-Diagramme . . . . .	20
2.5.1	Relativistische Kausalität . . . . .	20
2.5.2	Lorentz-Boosts . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>25</b>
3.1	Vierergeschwindigkeit . . . . .	25
3.2	Energie-Impuls-Beziehung . . . . .	26
3.3	Bewegungsgleichung . . . . .	27
3.3.1	Kräftefreies Teilchen . . . . .	28
3.3.2	Teilchen in einem Potential . . . . .	28

3.4	Drehimpuls . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Maxwell-Gleichungen</b>	<b>35</b>
4.1	Invarianten des Feldes . . . . .	35
4.2	Homogene Maxwell-Gleichungen . . . . .	36
4.3	Wirkung des elektromagnetischen Feldes . . . . .	36
4.4	Inhomogene Maxwell-Gleichungen . . . . .	38
4.5	Transformation der elektromagnetischen Felder . . . . .	39
4.6	Feld einer bewegten Ladung . . . . .	40
4.7	Doppler-Effekt . . . . .	42
4.8	Energie-Impuls-Tensor . . . . .	43
4.8.1	Erhaltungssätze in Anwesenheit von geladener Materie . . . . .	45
4.8.2	Energie-Impuls-Tensor makroskopischer Körper . . . . .	47
4.8.3	Ideale Flüssigkeit . . . . .	49
4.9	Thermodynamik . . . . .	50
4.9.1	Schwarzkörperstrahlung . . . . .	50
4.9.2	Ideales Gas . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>53</b>
5.1	Geodätengleichung . . . . .	53
5.2	Äquivalenzprinzip . . . . .	55
5.3	Entfernungen und Zeitintervalle . . . . .	57
5.4	Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	59
5.4.1	Ruhsystem eines konstant-beschleunigten Beobachters . . . . .	59
5.4.2	Geodäten . . . . .	61
5.4.3	Unruh-Effekt . . . . .	62
5.5	Rotierendes Bezugssystem . . . . .	63
5.6	Schwaches Gravitationsfeld . . . . .	64
5.7	Schwarzschild-Metrik . . . . .	65
5.7.1	Eddington-Finkelstein-Metrik . . . . .	68
5.7.2	Nichtrelativistischer Grenzfall . . . . .	68
5.7.3	Metrik in der Nähe des Ereignishorizonts . . . . .	69
5.7.4	Geodäten . . . . .	69

5.7.5	Periheldrehung . . . . .	71
5.7.6	Lichtablenkung . . . . .	72
5.7.7	Stabilität der kreisförmigen Orbits . . . . .	73
<b>A</b>	<b>Tensoren</b>	<b>75</b>

## Literatur

J. D. Jackson

*Classical Electrodynamics*

(Jon Wiley & Sons, New York, 1998)

gut, ist das Standardwerk für die Elektrodynamik

A. M. Steane

*Relativity Made Relatively Easy*

(Oxford University Press, Oxford, 2012)

modern, erklärt die Konzepte, sowohl SRT als auch ART

W. Pauli

*Relativitätstheorie*

(Springer, Berlin, 2000)

Klassiker, kompakt, enthält auch die ART

W. Nolting

*Grundkurs: Theoretische Physik 4*

(Springer, Berlin, 2002)

enthält Übungsaufgaben inklusive Lösungen

T. Fließbach

*Allgemeine Relativitätstheorie*

(Springer, Berlin, 2012)

enthält nur den Teil der SRT der für die ART benötigt wird

L. D. Landau, E. M. Lifschitz,

*Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band II: Klassische Feldtheorie*

Akademie Verlag Berlin, 11. Auflage (1976)

Klassiker

# Kapitel 1

## Relativitätsprinzip

In diesem Einleitungskapitel möchten wir einen Teil der klassischen Mechanik wiederholen, mit einem besonderen Augenmerk auf das Prinzip der Relativität, um danach für die *spezielle Relativitätstheorie* (SRT) vorbereitet zu sein. Die physikalischen Vorgänge finden im dreidimensionalen affinen euklidischen Raum statt. Affin bedeutet in diesem Kontext, dass es keinen (ausgezeichneten) Koordinatenursprung gibt. Erst durch die Festlegung eines (beliebigen) Koordinatenursprungs wird der Raum zum Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ .

Die Position eines Objektes in diesem Raum wird durch den *Ortsvektor*  $\mathbf{r}$  beschrieben. Für die Beschreibung der Bewegung des Objektes führen wir den Zeitparameter  $t$  ein, so dass  $\mathbf{r}(t)$  die Bahnkurve des Objektes darstellt. In der klassischen Mechanik ist  $t$  ein globaler Parameter, welcher in Einheiten einer periodischen Bewegung (z. B. einer Pendel- oder Atomuhr) gemessen wird. Nachdem man sich auf eine Zeiteinheit geeinigt hat, unterscheiden sich die Zeiten in verschiedenen Bezugssystemen um höchstens eine Konstante.

Der Ortsvektor ist abhängig vom Koordinatenursprung und kann daher nicht in physikalischen Gesetzen auftreten. In diese dürfen nur Vektoren wie etwa der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$  auftreten, welcher unabhängig von einer konkreten Wahl des Koordinatenursprungs ist.<sup>1</sup> Vektoren sind keine Messgrößen. Um einen Punkt im Ortsraum festzulegen, braucht es neben der Wahl des Koordinatenursprungs auch die Festlegung einer Einheit (z. B. dem Urmeter) und die Wahl der Koordinatenachsen. Drei senkrecht aufeinanderstehende Lineale mit Einheitslänge bilden so ein Koordinatensystem. Wir beschreiben dies durch die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ , welche jeweils vom Anfang zum Ende des jeweiligen Lineals zeigen. Da die Vektoren ein Orthonormalsystem bilden, erfüllen sie  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . Nach der Wahl einer Basis, kann man den Vektor eindeutig durch seine kartesischen Koordinaten  $r_i$

---

<sup>1</sup>In der allgemeinen Relativitätstheorie wird der Geschwindigkeitsvektor ein Element des Tangentialraumes an einem Punkt  $\mathbf{r}$ .

beschrieben, wobei gilt<sup>2</sup>

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{e}_i \equiv r_i \mathbf{e}_i. \quad (1.1)$$

Wir können uns nun die Frage stellen, in welcher Beziehung die Koordinaten zweier solcher Koordinatensysteme im Allgemeinen zueinander stehen. Dafür führen wir eine zweite orthonormierte Basis  $\mathbf{e}'_i$  ein (auf welche sich ein anderer Beobachter festgelegt hat). Da die Basis  $\mathbf{e}_i$  vollständig ist, kann man die neuen Basisvektoren  $\mathbf{e}'_i$  als Linearkombination der alten Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  schreiben, d. h. wir haben  $\mathbf{e}'_i = R_{ij} \mathbf{e}_j$  mit den Matrixelementen  $R_{ij} \in \mathbb{R}$ .<sup>3</sup> Aus der Forderung, dass sowohl das alte als auch das neue Koordinatensystem orthonormiert ist, erhalten wir

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = R_{ik} R_{jl} \underbrace{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l}_{=\delta_{kl}} = R_{ik} R_{jk} = (RR^t)_{ij}, \quad (1.2)$$

d. h. die Transformation ist orthonormal  $R \in O(3)$  mit  $R^{-1} = R^t$ . Die neuen Koordinaten  $r'_i$  erhält man aus

$$r_j \mathbf{e}_j = \mathbf{r} = r'_i \mathbf{e}'_i = r'_i R_{ij} \mathbf{e}_j, \quad (1.3)$$

d. h.  $r_j = (R^t)_{ji} r'_i$  was äquivalent ist mit  $r'_j = R_{ji} r_i$ . Im Weiteren verwenden wir die Notation  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$  für die Koordinaten des Vektors  $\mathbf{r}$  (und nicht für den Vektor selbst). Damit können wir die Transformationsregel kompakt schreiben als  $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ . Die Wahl eines (möglicherweise zeitabhängigen) Koordinatensystems und einer Zeitmessung nennt man ein Bezugssystem. Einen Punkt in der Raumzeit beschrieben wird durch  $(t, \mathbf{r})$  in einem Bezugssystem nennen wir ein *Ereignis*.

## 1.1 Galileisches Relativitätsprinzip

Das Relativitätsprinzip beruht auf der Tatsache, dass es kein bevorzugtes Bezugssystem gibt. Die Bewegung eines physikalischen Objektes soll nur von der (relativen) Position zu den anderen Objekten abhängen und nicht von der Wahl des Bezugssystems. Zudem fordert man, dass die physikalischen Gesetze in gewissen Bezugssystemen gleich aussehen.

<sup>2</sup>Beachten Sie die einsteinsche Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

<sup>3</sup>Als Beispiel betrachten wir ein Bezugssystem  $S'$ , welches um  $\theta$  bezüglich der  $\mathbf{e}_3$ -Achse von  $S$  gedreht ist. Mit Hilfe elementarer Geometrie erhalten wir den Ausdruck  $R(\theta \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### 1.1.1 Inertialsystem

Die Form der physikalischen Gesetze hängt im Allgemeinen vom Bezugssystem ab. In der klassischen Mechanik gibt es ausgezeichnete Bezugssysteme, in denen die Bewegungsgleichungen eine besonders schöne Form haben. Solche Systeme heißen Inertialsysteme und in ihnen gilt das newtonsche Gesetz

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1.4)$$

wobei  $m$  die Masse des Teilchens,  $\mathbf{p}$  der Impuls und  $\mathbf{F}$  die Kraft, die auf das Teilchen wirkt, bezeichnet. Im Besonderen bewegen sich kräftefreie Teilchen in Inertialsystemen auf Geraden gemäß

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \quad (1.5)$$

Empirisch zeigt sich, dass der Fixsternhimmel ein Inertialsystem darstellt.

### 1.1.2 Galilei-Transformation

Man kann sich jetzt die Frage stellen, wie man ausgehend von einem Inertialsystem  $S$ , weitere Inertialsysteme  $S'$  finden kann. Dafür untersuchen wir allgemeine Transformationen  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r}, t) = R(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{d}(t)$  und  $t \mapsto t' = t + t_0$  mit  $R(t) \in O(3)$ . Wenn man nun die Fall eines kräftefreien Massenpunktes betrachtet, fordern wir

$$0 = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \ddot{R}\mathbf{r} + 2\dot{R}\dot{\mathbf{r}} + R\ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{d}} = \ddot{R}\mathbf{r} + 2\dot{R}\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{d}}. \quad (1.6)$$

wobei wir die allgemeine Parametrisierung (1.5) eines kräftefreien Massenpunktes verwendet haben. Da diese Gleichung für alle möglichen Bahnkurven gelten sollten, müssen wir fordern, dass  $\dot{R} = 0$  und  $\ddot{\mathbf{d}} = 0$ , d. h.  $R(t) = R$  und  $\mathbf{d}(t) = -\mathbf{w}t + \mathbf{d}_0$ .

Wir haben damit alle möglichen Transformationen bestimmt, welche ein Inertialsystem auf ein anderes Inertialsystem abbilden. Diese Transformationen

$$t' = t + t_0, \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{r} - \mathbf{w}t + \mathbf{d}_0, \quad (1.7)$$

heißen Galilei-Transformationen und bilden eine 10-parametrische Gruppe mit den Parametern  $t_0$  (1),  $R$  (3),  $\mathbf{w}$  (3) und  $\mathbf{d}_0$  (3 Parameter). Wir sehen somit, dass sich je zwei Inertialsysteme mit einer konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{w}$  gegeneinander bewegen und ansonsten nur die Koordinatenachsen verschoben  $\mathbf{d}_0$  und gedreht  $R$  sind, siehe Abbildung 1.1.

### 1.1.3 Kovarianz der newtonschen Gleichungen

Eine Gleichung  $G(X_{\mathbf{r},t}) = 0$  heißt kovariant oder forminvariant bezüglich der Galilei-Transformationen, wenn sie ausgedrückt durch die transformierten Größen  $X'_{\mathbf{r}',t'}$

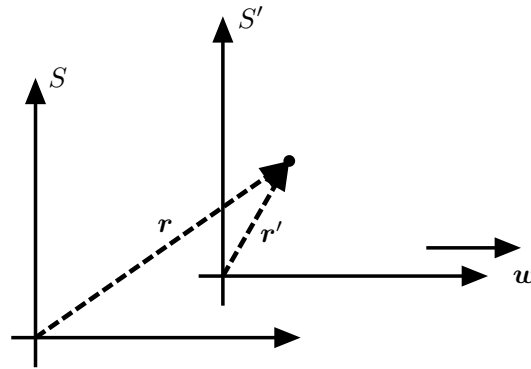


Abbildung 1.1: Zwei Bezugssysteme  $S$  und  $S'$ , welche mit der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{w}$  zueinander bewegt sind. Die Koordinaten  $\boldsymbol{r}$  und  $\boldsymbol{r}'$  eines Objektes in den zwei Bezugssystemen stehen via  $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}t + \boldsymbol{d}_0$  und  $t' = t + t_0$  miteinander in Beziehung ( $R = \mathbb{1}_3$ ).

dieselbe Form besitzt, d. h.  $G(X_{\boldsymbol{r},t}) = 0$  ist äquivalent zu  $G(X'_{\boldsymbol{r}',t'}) = 0$ . Damit können wir das galileische Relativitätsprinzip durch die beiden äquivalenten Aussagen beschreiben:

- *Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form.*
- *Die Naturgesetze sind galileikovariant, d. h. forminvariant unter Galilei-Transformationen.*

Daraus folgt sofort, dass ein Beobachter durch Messungen nicht entscheiden kann, in welchem Inertialsystem er sich befindet. Insbesondere sind alle Inertialsysteme äquivalent.

Die newtonschen Gleichungen  $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$  sind kovariant, vorausgesetzt  $\boldsymbol{F}$  ist ein Vektorfeld, d. h.  $\boldsymbol{F}$  transformiert (punktweise) wie ein Vektor

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}') = R\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \quad (1.8)$$

wobei  $\boldsymbol{r}'$  und  $\boldsymbol{r}$  durch eine Galilei-Transformation (1.7) verknüpft sind. Es ist einfach nachzurechnen, dass  $\ddot{\boldsymbol{r}}' = R\ddot{\boldsymbol{r}}$ . Damit können wir die Kovarianz der Newtongleichung zeigen

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}') = m'\ddot{\boldsymbol{r}}' \Leftrightarrow R\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m'R\ddot{\boldsymbol{r}} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\ddot{\boldsymbol{r}}, \quad (1.9)$$

wobei wir voraussetzen mussten, dass die Masse invariant ist:  $m = m'$ .

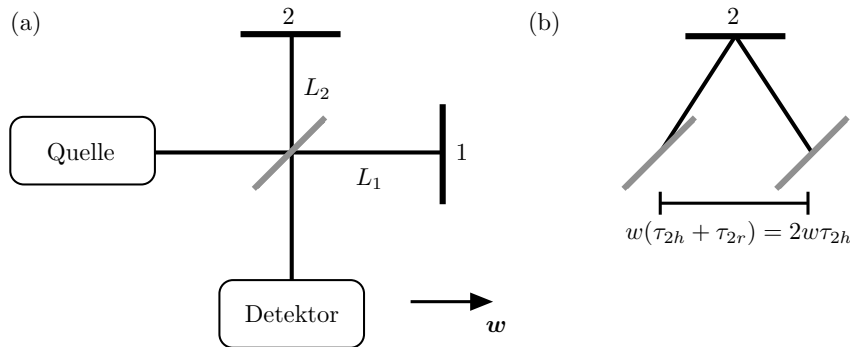


Abbildung 1.2: (a) Schematischer Aufbau des Michelson-Interferometers zur Messung der Erdgeschwindigkeit  $w$  relativ zum ruhenden Äther. Das Licht, welches von der Quelle ausgesendet wird, geht zuerst durch einen halb durchlässigen Strahlteiler (grau). Nachdem die zwei Strahlen die Strecken  $2L_1$  bzw.  $2L_2$  zurückgelegt haben, wird ihre Interferenz am Detektor registriert. Im einfachsten Fall ist die Bewegungsrichtung der Erde entlang des Arms 1. Dadurch ergibt sich die Ausbreitung des Lichts im Arm 2 von einem ruhenden Bezugssystem aus gesehen wie in (b) gezeigt wird.

## 1.2 Einsteinsches Relativitätsprinzip

### 1.2.1 Michelson-Morley-Experiment

Die maxwellischen Gleichungen beschreiben elektromagnetische Wellen, welche sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c = 299792458 \text{ m/s}$  ausbreiten. Allerdings war es nicht klar, bezüglich welches Bezugssystems diese Geschwindigkeit gilt. Ausgehend von den Galilei-Transformationen ist es einfach zu sehen, dass für ungedrehte Koordinatenachsen ( $R = \mathbb{1}_3$ ) sich Geschwindigkeiten einfach addieren. Betrachten wir ein Objekt, welches sich auf der Bahn  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}'t$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  im System  $S'$  bewegt. Dasselbe Objekt bewegt sich dann im System  $S$  mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{w} + \mathbf{v}'. \quad (1.10)$$

Inbesondere bewegt sich das Licht in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich schnell.

Michelson (Nobelpreis 1907) entwickelte daher einen experimentellen Aufbau, mit dem sich feststellen lässt, in welchem Bezugssystem (Äther) sich die Lichtwellen isotrop mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreiten. Dafür verglich er die Laufzeiten, die das Licht braucht um eine Strecken  $2L_1$ ,  $2L_2$  in zwei orthogonale Richtungen zurückzulegen, in einem Interferometer, siehe Abbildung 1.2(a). Da sich die Erde mit der Geschwindigkeit  $w \simeq 30 \text{ km/s}$  um die Sonne dreht, müssten sich im Laufe des Jahres die Laufzeitunterschiede ändern.

Falls die Erdgeschwindigkeit  $w$  bezüglich des Äthers parallel zum Arm 1 liegt, erhalten wir die Laufzeit  $\tau_{1h} = L_1/(c - w)$  für den Hinweg und  $\tau_{1r} = L_1/(c + w)$  für den

Rückweg. Die gesamte Laufzeit des Lichtstrahles im Arm 1 ist daher gegeben durch

$$\tau_1 = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1 - w^2/c^2}, \quad (1.11)$$

d. h. korrigiert durch den Faktor  $(1 - w^2/c^2)^{-1}$  vom naiven Wert  $2L_1/c$  ohne Berücksichtigung der relativen Bewegung zum Äther.

Die Laufzeit im Arm 2, welcher senkrecht zur Erdbewegung steht, ist für die Hin- und den Rückweg gleich  $\tau_{2h} = \tau_{2r}$  mit  $\tau_2 = 2\tau_{2h}$ . Bezüglich des Äthers ist die Geschwindigkeit einfach  $c$ . Allerdings ist in diesem Bezugssystem der Weg durch die Bewegung der Spiegel länger. Der Gesamtweg ist gegeben durch  $\ell = 2[L_2^2 + w^2\tau_{2h}^2]^{1/2}$ , vgl. Abbildung 1.2(b). Das Auflösen der Gleichung  $\tau_2 = \ell/c$  nach  $\tau_2$  liefert

$$\tau_2 = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad (1.12)$$

d. h. eine Reduktion um einen anderen Faktor  $(1 - w^2/c^2)^{-1}$ .

Das Interferometer misst die Differenz der optischen Weglängen

$$\delta = c(\tau_2 - \tau_1) = \frac{2}{1 - w^2/c^2} \left( L_2 \sqrt{1 - w^2/c^2} - L_1 \right) \quad (1.13)$$

mit einer Genauigkeit  $\lambda \simeq 500 \text{ nm}$  gegeben durch die Wellenlänge des Lichtes. Nach einem Vierteljahr ist die Apparatur effektiv um  $90^\circ$  gedreht und wir erhalten eine neue Weglängendifferenz

$$\delta' = c(\tau_2 - \tau_1) = \frac{2}{1 - w^2/c^2} \left( L_2 - L_1 \sqrt{1 - w^2/c^2} \right),$$

da die Rolle von  $L_1$  und  $L_2$  inzwischen getauscht wurde. Der Unterschied der Weglängendifferenzen mit einem Vierteljahr Zeitunterschied ergibt sich durch

$$|\delta' - \delta| = \frac{2(L_2 + L_1)}{1 - w^2/c^2} \left( 1 - \sqrt{1 - w^2/c^2} \right) \stackrel{w \ll c}{\approx} (L_1 + L_2) \frac{w^2}{c^2}. \quad (1.14)$$

Es ist interessant zu sehen, welche Länge der Interferenzarme benötigt wird, um den Effekt der relativen Bewegung der Erde zum Äther zu messen. Mit  $w/c \simeq 10^{-4}$  und  $\delta' - \delta \simeq \lambda \simeq 10^{-7} \text{ m}$  erhalten wir  $L_1 + L_2 \simeq 10 \text{ m}$ .

Michelson fand, dass das Interferenzmuster unabhängig von der Jahreszeit und damit der Orientierung des Interferometers immer gleich aussieht, woraus man schließen muss, dass es keinen Äther (als ausgezeichnetes Bezugssystem) gibt und dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich ist.

### 1.2.2 Einsteinsches Postulat

Das Michelson-Morley-Experiment führte Einstein (1905) dazu, neben dem galileischen Relativitätsprinzip, dass die physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben, das zusätzliche Postulat,

- die Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen denselben Betrag  $c$ ,

zu fordern. Dieses Prinzip ist die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie. Inertialsysteme sind dabei so definiert, dass in ihnen freie Teilchen, wie in der klassischen Mechanik, dem Trägheitsgesetz  $\ddot{\mathbf{r}} = 0$  folgen. Man sieht sofort, dass die Kovarianz der physikalischen Gesetze nun nicht mehr unter den Galilei-Transformationen gefordert werden kann, da diese auf die Geschwindigkeitsadditionsformel (1.10) führen. Im Kapitel 2 werden wir untersuchen, welche Transformationsgruppe kompatibel mit dem einsteinschen Postulat ist. Wir wollen im Folgenden allerdings zuerst ein paar einfache Konsequenzen aus dem einsteinschen Postulat kennenlernen.

Da wir im Abschnitt 1.1.2 gesehen haben, dass wir bei der Annahme einer absoluten Zeit aus dem Relativitätsprinzip sofort die Galilei-Transformationen als allgemeine Transformationen zwischen Inertialsystemen folgen, müssen wir den Begriff einer absoluten Zeit aufgeben und fordern, dass im Allgemeinen  $t' \neq t$ . Der absolute Wert der Lichtgeschwindigkeit ermöglicht es, Uhren 1 und 2 in den zwei Bezugssystemen  $S$  und  $S'$  zu synchronisieren und somit zumindest zum Teil eine gemeinsame Zeit einzuführen.<sup>4</sup>

Das Protokoll für die Synchronisation zweier Uhren in zwei verschiedenen Inertialsystemen  $S$  und  $S'$ , welche die Zeit durch denselben periodischen Vorgang messen, ist das folgende: Wir stellen uns vor, dass im Bezugssystem  $S$  ein Lichtblitz von der Uhr 1 zur Zeit  $t_0$  ausgesandt wird. Der Strahl wird von der Uhr 2 (ruhend im System  $S'$ ) reflektiert, und zur Zeit  $t_0 + \Delta t$  von der Uhr 1 detektiert. Da die Lichtgeschwindigkeit absolut ist, können wir den Zeitpunkt des Eintreffens des Lichtstrahls an der Uhr 2 mit der Zeit  $t_0 + \Delta t/2$  im System  $S$  identifizieren und damit die Uhren synchronisieren. Weiterhin erlaubt uns die Universalität der Lichtgeschwindigkeit, Längenmessungen auf Zeitmessungen zurückzuführen und den Meter als den  $1/299792458$ -ten Teil der Strecke zu definieren, welche ein Lichtstrahl in einer Sekunde zurücklegt. Das Problem der Synchronisation der Uhren ist, dass das Vorgehen nicht transitiv ist. Wenn die Uhren 1 und 2 synchron und außerdem 2 und 3 synchron sind, dann folgt damit nicht, dass auch 1 und 3 synchron sind. Dies führt uns auf den Begriff der Relativität der Gleichzeitigkeit.

### Relativität der Gleichzeitigkeit

Aus der absoluten Zeit in der galileischen Raumzeit folgt, dass zwei Ereignisse, welche gleichzeitig im Bezugssystem  $S'$  geschehen, auch gleichzeitig in  $S$  stattfinden. Diese Tatsache ist inkompatibel mit dem einsteinschen Postulat der Universalität der Lichtgeschwindigkeit. Um dies zu sehen, betrachten wir zwei Bezugssysteme, welche sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$ ,  $w > 0$  gegeneinander bewegen. Wir betrachten drei Uhren  $A, B, C$  auf der  $x$ -Achse, welche in  $S'$  ruhen. Die Uhr B

---

<sup>4</sup>Wie wir später sehen werden, laufen Uhren, welche zu einem Zeitpunkt synchronisiert wurden, später aber wieder auseinander.

befindet sich zwischen den Uhren A und C, so dass der Abstand von A zu B gleich dem Abstand von B zu C ist. Ein Beobachter im System  $S'$  wird feststellen, dass ein Lichtblitz, welcher zur Zeit  $t'_B$  von B ausgesandt wird, gleichzeitig ( $t'_A = t'_C$ ) bei A und C eintrifft.

Aus der Sicht eines Beobachters im (bewegten) System  $S$  wird der Lichtblitz zur Zeit  $t_B$  von B emittiert und breitet sich auch mit  $c$  in alle Richtungen aus. Da sich A zum Lichtblitz hin und C vom Lichtblitz wegbewegt, gilt aus der Sicht von  $S$  die Ungleichung  $t_A < t_C$ . Somit sind Uhren, welche im System  $S'$  synchronisiert sind, im System  $S$  nicht synchronisiert und daher hängt der Begriff der „Gleichzeitigkeit“ vom Bezugssystem ab. Die Abwesenheit eines absoluten Gleichzeitigkeitsbegriffs ist die Ursache für viele der zunächst paradox erscheinenden Konsequenzen des Relativitätsprinzips.

### Zeitdilatation

Betrachten wir nun eine Uhr A, welche im System  $S'$  ruht und einen Lichtblitz auf einen Spiegel B im Abstand  $L_0$  (orthogonal zur relativen Bewegungsrichtung  $-\mathbf{w}$  des Bezugssystems  $S$ ) sendet. Dieser Lichtblitz wird nach der Zeit  $\Delta t' = 2L_0/c$  wieder bei der Uhr A eintreffen. Im Bezugssystem  $S$  ist der Spiegel B bewegt und der Lichtstrahl muss den Weg  $L = \sqrt{4L_0^2 + w^2(\Delta t)^2}$  zurücklegen, siehe Abbildung 1.2(b). Nach dem einsteinschen Postulat ist der Weg des Lichtstrahls über  $c$  mit der Zeitdifferenz  $\Delta t$  verknüpft, d. h.  $L = c \Delta t$ . Das Auflösen dieser Gleichung nach  $\Delta t$  liefert das Resultat

$$\Delta t = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 - w^2}} = \gamma \Delta t' \quad (1.15)$$

mit dem Zeitdilationsfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} > 1. \quad (1.16)$$

Aus der Sicht von  $S$  dauert der Vorgang daher um den Faktor  $\gamma$  länger. Die Zeit, welche von der ruhenden Uhr gemessen wird, bezeichnen wir auch als *Eigenzeit*  $\Delta\tau$ . Sie ist stets geringer als die Zeitdifferenz in einem bewegten System. Bewegt sich ein Objekt in  $S$  mit einer veränderlichen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  von  $x_A = (t_A, \mathbf{r}_A)$  nach  $x_B = (t_B, \mathbf{r}_B)$ , kann man an jedem Zeitpunkt  $t$  ein momentanes Ruhesystem  $S'_t$  mit  $\mathbf{w} = \mathbf{v}(t)$  und  $\Delta t' = \Delta\tau = \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} \Delta t$  einführen. Die mit dem Objekt mitbewegte Uhr misst die Eigenzeit

$$\tau = \sum \Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - v(t)^2/c^2}. \quad (1.17)$$

Die Eigenzeit  $\tau$  ist eine Eigenschaft der Bahn und daher unabhängig vom Inertialsystem. Dies ist sofort klar, da  $\tau$  physikalisch durch den Zeigerstand der mitbewegten Uhr bestimmt wird.

Wenn sich zwei Beobachter relativ zueinander bewegen, dann schließen beide, dass die Uhr des jeweils anderen langsamer geht. Dies erscheint zunächst paradox, führt aber auf keinen Widerspruch, da Gleichzeitigkeit relativ ist.

Die Zeitdilatation ist wichtig im Verständnis des Myonzerfalls. Kosmische Strahlung erzeugt Myonen in ca. 10 Kilometern Höhe. Diese Myonen haben eine relativ kurze Lebenszeit von  $\simeq \mu\text{s}$ . In dieser Zeit legen die Myonen nur eine Strecke von ein paar hundert Meter zurück. Trotzdem findet man viele Myonen, welche auf der Erdoberfläche auftreffen. Man kann dieses Resultat verstehen, wenn man berücksichtigt, dass die Geschwindigkeit der Myonen nahezu Lichtgeschwindigkeit ist mit  $w = 0,994c$  folgt  $\gamma \simeq 10$ . Damit ist die Lebenszeit der Myonen im Erdsystem zehnmal länger und die Myonen bewegen sich mehrere Kilometer, bevor sie zerfallen. Die Betrachtung dieses Problems aus dem Ruhesystem der Myonen führt uns auf den Begriff der Längenkontraktion, welchen wir im Folgenden behandeln.

### Längenkontraktion

Wie im vorhergehenden Abschnitt betrachten wir eine im System  $S'$  ruhende Anordnung einer Uhr A und eines Spiegels B im Abstand  $L_0$ . Allerdings sei dieses Mal der Lichtweg parallel zur relativen Bewegung der zwei Bezugssysteme (d. h. die Uhr ist im Vergleich zum letzten Abschnitt um  $90^\circ$  gedreht). Die Entfernung von A und B wird durch die Laufzeit des Lichtes  $\Delta t'$  über  $L_0 = c \Delta t' / 2$  festgelegt. Betrachten wir nun das System im bewegten Bezugssystem  $S$ . Sei  $\Delta t_h$  die Laufzeit des Lichtes für den Hinweg (von A nach B). In dieser Zeit hat sich der Spiegel um  $w \Delta t_h$  bewegt. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verlangt daher, dass  $c \Delta t_h = L + w \Delta t_h$  mit  $L$  der Abstand der beiden Spiegel im System  $S$ . Daraus erhält man für die Laufzeit beim Hinweg  $\Delta t_h = L / (c - w)$ . Mit einer äquivalenten Überlegung erhält man für den Rückweg  $\Delta t_r = L / (c + w)$ .

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man für die gesamte Laufzeit den Ausdruck  $\Delta t = \Delta t_h + \Delta t_r = 2\gamma^2 L / c$ . Andererseits gilt auf Grund der Formel für die Zeitdilatation  $\Delta t = \gamma \Delta t'$ . Auflösen der Gleichung  $2L_0 = c \Delta t' = 2\gamma L$  nach  $L$  liefert die Längenkontraktionsformel

$$L = L_0 \sqrt{1 - w^2/c^2} = L_0 / \gamma; \quad (1.18)$$

d. h. ein bewegter Maßstab erscheint gegenüber dem Ruhezustand um den Faktor  $\gamma$  (in die Bewegungsrichtung) verkürzt. Mit der Längenkontraktion können wir das Myonproblem vom Ruhesystem des Myons aus als Verkürzung des Abstandes Erdoberfläche-Entstehungsort der Myonen verstehen. In dieser Weise bedingen Längenkontraktion und Zeitdilatation einander und führen nur zusammen zu einer konsistenten relativistischen Beschreibung.



## Kapitel 2

# Lorentz-Transformation

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass das einsteinsche Postulat, welches durch das Michelson-Morley-Experiment gestützt wird, uns zwingt, unsere Vorstellungen von Zeit und Raum zu überdenken. Insbesondere müssen wir uns von dem Begriff einer absoluten Zeit verabschieden. Wir wollen in diesem Kapitel das einsteinsche Postulat zu einer mathematischen Theorie entwickeln, welche es uns erlaubt, neue Naturgesetze aufzustellen, welche mit dem einsteinschen Postulat kompatibel sind. Dazu müssen wir uns zuerst überlegen, wodurch die neuen Transformationen zwischen Inertialsystemen beschrieben werden.

Ähnlich wie die Galilei-Transformationen die newtonschen Gleichungen invariant lassen, sind die Lorentz-Transformationen die Gruppe der Transformationen, welche das Trägheitsgesetz und das einsteinsche Postulat invariant lassen. Insofern erlauben die Lorentz-Transformationen in der speziellen Relativitätstheorie aus einem Inertialsysteme in ein beliebiges anderes Inertialsystem zu wechseln. Danach verbleibt die Aufgabe eine relativistische (d. h. Lorentz-invariante) Formulierung der Mechanik und der Elektrodynamik zu finden, welche wir im nächsten Kapitel untersuchen werden. Dabei wird sich zeigen, dass die Maxwell-Gleichungen bei passender Transformation der Felder bereits Lorentz-invariant sind. Dahingegen bedarf die newtonsche Mechanik einer Änderung. Der Grund ist, dass Fernwirkungsgesetze (z. B. das newtonsche Gravitationsgesetz) a priori nicht-relativistisch sind, da sie sich auf den „Abstand zweier Körper zur gleichen Zeit“ berufen. Dieser Begriff ist inkompatibel mit der Relativität der Gleichzeitigkeit. Daher müssen in der Relativitätstheorie alle Fernwirkungsgesetze durch Felder mit relativistischen Feldgleichungen wie in den Maxwell-Gleichungen ersetzt werden.

### 2.1 Transformation zwischen Inertialsystemen

Zunächst erscheint es, als ob das einsteinsche Postulat dem Trägheitsgesetz widerspricht. Dieses Gefühl ist allerdings der Tatsache geschuldet, dass wir fest in unserem

klassischen Bild der Welt verwurzelt sind und das einsteinsche Postulat, wie im letzten Kapitel gesehen, einhergeht mit dem Verlust des absoluten Begriffes der Gleichzeitigkeit und daher zur Einführung einer Zeit pro Bezugssystem führt. Um die Gruppe der Lorentz-Transformationen zu erhalten, betrachten wir zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$ , welche sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{w}$  relativ zueinander bewegen.

Wir betrachten einen Lichtblitz, der bei  $(t_1, \mathbf{r}_1)$  ausgesendet wird und später bei  $(t_2, \mathbf{r}_2)$  eintrifft. Wegen des einsteinschen Postulats gilt sowohl

$$(\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0 \quad \text{als auch} \quad (\Delta \mathbf{r}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = 0 \quad (2.1)$$

mit  $\Delta t = t_2 - t_1$  und  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Die Bewegungen eines kräftefreien Teilchens in einem Inertialsystem sind gegeben durch Geraden, siehe (1.5). Aus der Forderung, dass eine Lorentz-Transformation Inertialsysteme aufeinander abbilden soll, folgt sofort, dass sie Geraden auf Geraden abbildet. Dies ist äquivalent dazu, dass die Lorentz-Transformation eine lineare Abbildung von  $(\Delta t, \Delta \mathbf{r})$  nach  $(\Delta t', \Delta \mathbf{r}')$  ist. Auf Grund der Linearität der Transformation ist (2.1) äquivalent zu<sup>1</sup>

$$(\Delta \mathbf{r}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = \kappa(\mathbf{w})[(\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2]. \quad (2.2)$$

Betrachten wir nun ein weiteres Bezugssystem  $S''$ , welches sich mit der Geschwindigkeit  $-\mathbf{w}$  relativ zu  $S'$  bewegt, dann erhalten wir

$$(\Delta \mathbf{r}'')^2 - c^2(\Delta t'')^2 = \kappa(-\mathbf{w})\kappa(\mathbf{w})[(\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2].$$

Da  $S''$  relativ zu  $S$  ruht ist  $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}''$  und  $\Delta t = \Delta t''$ , woraus folgt dass  $\kappa(-\mathbf{w})\kappa(\mathbf{w}) = 1$ . Wegen der Isotropie des Raumes darf  $\kappa(\mathbf{w})$  zudem nicht von der Richtung der relativen Bewegung, sondern nur vom Betrag  $w$  abhängen. Daraus können wir schließen, dass  $\kappa(-\mathbf{w})\kappa(\mathbf{w}) = \kappa(w)^2 = 1$  und somit  $\kappa(w) = 1$ .<sup>2</sup>

Die Resultate lassen sich am besten zusammenfassen indem man Ort und Zeit zu den *Viererkoordinaten*

$$x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{r}) \quad (2.3)$$

eines Teilchens zusammenfasst. Damit sind die Lorentz-Transformationen dadurch definiert, dass sie das Quadrat des Abstands

$$\Delta s^2 = (\Delta x') \cdot (\Delta x') = (\Delta x) \cdot (\Delta x) = (\Delta x)_\mu (\Delta x)^\mu = \eta_{\mu\nu} (\Delta x)^\mu (\Delta x)^\nu \quad (2.4)$$

invariant lassen,<sup>3</sup> mit der *Minkowski-Metrik*

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Eine lineare Abbildung bildet ein homogenes Polynom vom Grad 2 auf ein homogenes Polynom vom Grad 2 ab. Da  $(\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta \mathbf{r}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = 0$ , folgt aus der Homogenität sofort (2.2).

<sup>2</sup>Die alternative Lösung  $\kappa(w) = -1$  kann verworfen werden, da  $\kappa = 1$  bei  $w = 0$ .

<sup>3</sup>Ganz analog zur Tatsache, dass die Rotationen  $R$  den Abstand  $\sqrt{(\Delta \mathbf{r})^2}$  invariant lassen.

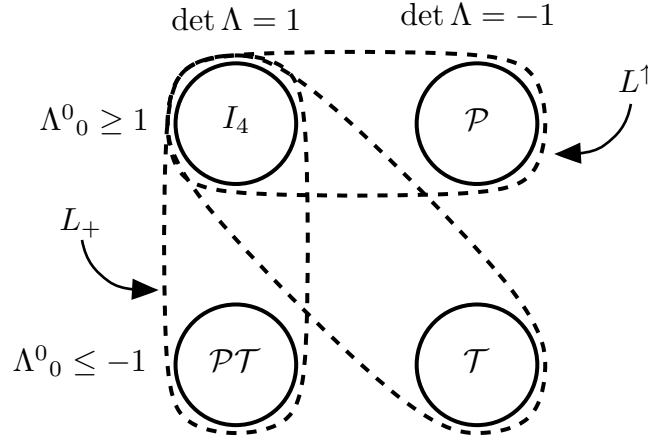


Abbildung 2.1: Struktur der Lorentz-Gruppe: die Lorentz-Gruppe  $L$  zerfällt in vier disjunkte Komponenten charakterisiert durch  $\det \Lambda = \pm 1$  und  $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$ .

Eine allgemeine affine Transformation zwischen den Bezugssystemen  $S$  und  $S'$  kann geschrieben werden als  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$  mit  $a \in \mathbb{R}^4$  und  $\Lambda \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$ . Die Bedingung (2.4) führt auf die Einschränkung

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta (\Delta x)^\alpha (\Delta x)^\beta = \eta_{\mu\nu} (\Delta x')^\mu (\Delta x')^\nu = \eta_{\mu\nu} (\Delta x)^\mu (\Delta x)^\nu,$$

was äquivalent ist zu

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

oder in Matrixnotation  $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ . Transformationen, welche die Bedingung (2.6) erfüllen, nennt man Elemente der Lorentz-Gruppe, welche man mit  $L = \text{O}(1, 3)$  bezeichnet. Die Gruppe der Transformationen, welche Inertialsysteme mit festen Maßstäben verbinden, ist die Gruppe der inhomogenen Lorentz-Transformationen mit  $x' = \Lambda x + a$ , auch *Poincaré-Gruppe* genannt.

## 2.2 Lorentz-Gruppe

Wir betrachten ein Element  $\Lambda \in L$ . Aus der Relation (2.6) lassen sich eine Reihe von Eigenschaften von  $\Lambda$  ableiten. Bildung der Determinanten liefert sofort  $\det^2 \Lambda = 1$ . Somit besteht  $L$  aus zwei Komponenten charakterisiert durch  $\det \Lambda = \pm 1$ .<sup>4</sup> Zudem erhält man für die (00)-Komponente die Eigenschaft  $(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 = 1$ , d. h.  $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$ . Somit enthält die Lorentz-Gruppe zwei disjunkte Komponenten charakterisiert durch das Vorzeichen von  $\Lambda^0_0$ .

<sup>4</sup>Die Inverse von  $\Lambda$  erhält man durch Multiplikation von rechts mit  $\Lambda^{-1} \eta$  als  $\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^t \eta$ .

Dass alle vier Fälle auftreten, zeigen die Spiegelungen

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{T} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{PT} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

mit  $\mathcal{P}$  der Spiegelung am Koordinatenursprung (Parität) und  $\mathcal{T}$  der Zeitumkehr. Die Spiegelungen bilden eine Untergruppe von  $L$ . Weitere Untergruppen sind zum Beispiel

$$\begin{aligned}
 L_+ &= \{\Lambda \in L \mid \det \Lambda = 1\}, & \text{die eigentlichen Lorentz-Transformationen,} \\
 L^\uparrow &= \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0_0 \geq 1\}, & \text{die orthochronen Lorentz-Transformationen,} \\
 L_+^\uparrow &= L_+ \cap L^\uparrow. & (2.8)
 \end{aligned}$$

Eine Lorentz-Transformation bildet nach Definition den Lichtkegel mit  $\Delta s^2 = 0$  auf sich selbst ab. Vektoren auf dem Lichtkegel mit  $v \cdot v = 0$  bezeichnet man auch als *Nullvektoren*. Wir definieren außerdem Vektoren, welche in das Äußere des Lichtkegels zeigen als *raumartige* Vektoren  $v$  mit  $v \cdot v < 0$  und solche die in das Innere des Lichtkegels zeigen als *zeitartige* Vektoren mit  $v \cdot v > 0$ . Zeitartige Vektoren kann man zusätzlich unterteilen in Vektoren, welche in die zeitartige Zukunft zeigen ( $v^0 > 0$ ) und solche die in die zeitartige Vergangenheit zeigen ( $v^0 < 0$ ).

Dass  $L_+^\uparrow$  eine Gruppe ist, sieht man geometrisch. Eine Lorentz-Transformation  $\Lambda \in L$  bildet das Innere des Lichtkegels auf sich ab. Dabei bleiben die beiden Teilkegel (Zukunft und Vergangenheit)  $V^\pm = \{x \mid x \cdot x > 0, \pm x^0 \geq 0\}$  entweder invariant oder werden vertauscht. Entscheidend dafür ist das Vorzeichen  $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$ , da  $[\Lambda(1, \mathbf{0})]^0 = \Lambda^0_0$ . Somit sind  $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$  und natürlich auch  $\det \Lambda$  multiplikativ<sup>5</sup> unter der Gruppenoperation. Die orthochronen Transformationen bilden damit die Zukunft auf die Zukunft und die Vergangenheit auf die Vergangenheit ab.

Auf Grund der Multiplizität von  $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$  und  $\det \Lambda$  kann jedes  $\Lambda \in L$  als das Produkt eines Elements der eigentlich-orthochronen Lorentz-Gruppe  $L_+^\uparrow$  mit einer Spiegelung  $\{I_4, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}$  geschrieben werden. Wir beschränken uns deshalb im folgenden auf die eigentlich-orthochrone Untergruppe.

<sup>5</sup>Dies folgt aus der allgemeinen Relation  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  für beliebige quadratische Matrizen  $A$  und  $B$ .

### 2.2.1 Eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe

Die  $4 \times 4$ -Matrix  $\Lambda$  hat insgesamt 16 reelle Einträge. Die Gleichung (2.6) liefert 10 unabhängige Gleichungen.<sup>6</sup> Daher werden Elemente  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  durch 6 reelle Parameter bestimmt.

Drei der Parameter können wir mit den drei-dimensionalen Rotationen identifizieren. In der Tat gilt

$$\Lambda(R) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2.9)$$

Daraus folgt sofort  $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$  wobei  $R \in \text{SO}(3)$  mit  $R^t R = I_3$ . Damit bilden die Rotationen  $\Lambda(R)$  eine Untergruppe von  $L_+^\uparrow$ .

Von größerem Interesse sind die verbleibenden drei-parametrischen Transformationen, von denen wir erwarten, dass sie gegeneinander bewegte Bezugssysteme verknüpfen. Dazu untersuchen wir, ob spezielle Lösungen mit der Blockform

$$\Lambda = \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.10)$$

existieren, d. h.  $x^2$  und  $x^3$  werden nicht transformiert. Einsetzen in (2.6) liefert die Bedingungen

$$a^2 - c^2 = 1, \quad ab - cd = 0, \quad b^2 - d^2 = -1.$$

Da wir nur an Lösungen aus  $L_+^\uparrow$  interessiert sind, fordern wir zudem  $a > 0$  und  $ad - bc = 1$ .

Die erste Gleichung können wir dadurch erfüllen, dass wir den Parameter  $\chi$  mit  $a = \cosh \chi$  und  $c = -\sinh \chi$  einführen. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir  $b = cd/a$ . Einsetzen in  $ad - bc = 1$  liefert  $1 = d/a$ , d. h.  $d = \cosh \chi$  und  $b = -\sinh \chi$ . Damit erhalten wir die speziellen Lorentz-Transformationen (Boosts)

$$\Lambda(\chi) = \left( \begin{array}{cc|cc} \cosh \chi & -\sinh \chi & 0 & 0 \\ -\sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \exp \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & -\chi & 0 & 0 \\ -\chi & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2.11)$$

Aus der letzten Identität folgt sofort, dass die Boosts eine Untergruppe bilden mit dem Multiplikationsgesetz

$$\Lambda(\chi_1 + \chi_2) = \Lambda(\chi_1)\Lambda(\chi_2). \quad (2.12)$$

---

<sup>6</sup>Transponieren von (2.6) führt zum selben Gleichungssystem. Daher sind nur 10 der 16 Gleichungen unabhängig.

Daraus lässt sich direkt folgern, dass  $\Lambda(\chi)^{-1} = \Lambda(-\chi)$ .

Im Folgenden wollen wir die physikalische Bedeutung von  $\Lambda(\chi)$  erläutern. Dafür schreiben wir das Transformationsgesetz  $x = \Lambda(\chi)^{-1}x'$  eines Boosts in Komponenten

$$\begin{aligned} ct &= (\cosh \chi)ct' + (\sinh \chi)r'_1, & r_2 &= r'_2, \\ r_1 &= (\sinh \chi)ct' + (\cosh \chi)r'_1, & r_3 &= r'_3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ein Objekt, welches im  $S'$ -System am Ort  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t')$  ruht, bewegt sich daher im System  $S$  mit der Geschwindigkeit<sup>7</sup>

$$w = \frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_1}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dr_1}{dt'} \left( \frac{dt}{dt'} \right)^{-1} = c \tanh \chi \quad (2.14)$$

Damit erhalten wir die Interpretation, dass  $\Lambda(\chi)$  auf ein neues Inertialsystem transformiert, welches sich mit der Geschwindigkeit  $w$  entlang der  $x$ -Achse relativ zu  $S$  bewegt, siehe Abbildung 1.1. Durch einfache hyperbolische Beziehungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \cosh \chi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \\ \sinh \chi &= \tanh \chi \cosh \chi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta\gamma \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit  $\beta = w/c$ . Aus (2.13) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - wx^1/c^2), & x'^2 &= x^2, \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - wt), & x'^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Für  $\beta \rightarrow 0$  erhalten wir als Grenzverhalten die Galilei-Transformation

$$t' = t, \quad x'^1 = x^1 - wt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3.$$

Eine Transformation in ein System  $S'$ , das sich mit einer Geschwindigkeit  $\mathbf{w}$  in eine beliebige Raumrichtung gegen  $S$  bewegt, kann man grundsätzlich durch eine Verkettung einer Rotation (so dass  $\mathbf{w}'$  entlang der  $x$ -Richtung ist), eines Boosts und einer Rückrotation erhalten. Viel einfacher ist allerdings die Idee, dass man den Vektor  $\mathbf{r}$  in eine Komponente  $\mathbf{r}_{\parallel}$  entlang  $\mathbf{w}$  und einer Komponente  $\mathbf{r}_{\perp}$  orthogonal dazu aufspalten kann. Analog zu (2.16) erhält man dann

$$t' = \gamma[t - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_{\parallel})/c^2], \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{w}t), \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}. \quad (2.17)$$

Da  $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}/w^2$  und  $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$  gilt, kann man einen allgemeinen Boost  $x' = \Lambda(\mathbf{w})x$  schreiben als

$$\Lambda(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\mathbf{w}^t/c \\ -\gamma\mathbf{w}/c & I_3 + (\gamma - 1)\mathbf{w}\mathbf{w}^t/w^2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

<sup>7</sup>In der Literatur wird  $\chi = \operatorname{artanh}(w/c)$  als *Rapidity* bezeichnet.

oder in anderen Worten

$$\begin{aligned} t' &= \gamma[t - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})/c^2], \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\gamma - 1}{w^2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} - \gamma\mathbf{w}t. \end{aligned}$$

Damit hängt ein Boost im Allgemeinen von den drei reellen Parametern  $\mathbf{w}$  ab. Es gilt  $\Lambda(\mathbf{w}) = \Lambda(R_{\mathbf{w}})\Lambda(\chi)\Lambda(R_{\mathbf{w}}^t)$  mit der Rotation  $R_{\mathbf{w}}$  definiert durch  $\mathbf{w} = R_{\mathbf{w}}(w, 0, 0)^t$ .

Die Lorentz-Transformationen werden für  $w \rightarrow c$  singularär. Die Lichtgeschwindigkeit stellt eine Maximalgeschwindigkeit dar. Kein Objekt (und auch keine Information) kann sich schneller als Licht bewegen.

## 2.3 Struktur der Poincaré-Gruppe

Die Gruppe der affinen Lorentz-Transformationen wird die Poincaré-Gruppe genannt. Nach diesen Vorüberlegungen wissen wir, dass ein allgemeines Element der Poincaré-Gruppe die folgende Form

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\mathbf{w}, R)x^{\nu} + a^{\mu} \quad (2.19)$$

hat. Wie die Galilei-Gruppe hat die Poincaré-Gruppe 10 Parameter. Vier Parameter für die Translation mit  $a$  und die 6 Parameter der Lorentz-Gruppe (3 für Rotationen  $R$  und 3 für Boosts  $\mathbf{w}$ ).

In der Tat kann man jede Lorentz-Transformation  $\Lambda$  als Produkt einer Rotation und eines allgemeinen Boosts schreiben mit  $\Lambda(\mathbf{w}, R) = \Lambda(R)\Lambda(\mathbf{w}) = \Lambda(R_2)\Lambda(\chi)\Lambda(R_1)$  mit  $R_1 = R_{\mathbf{w}}^t$  und  $R_2 = RR_{\mathbf{w}}$ . Man kann sich einfach klar machen, dass diese Zerlegung für jede Lorentz-Transformation  $x' = \Lambda x$  möglich ist. Dazu betrachten wir den linearen Unterraum  $M = \{x \mid x^0 = x'^0 = 0\}$ , gebildet durch die Schnittmenge der Ortsvektoren aus  $S$  und  $S'$ . Es gibt zwei Möglichkeiten:  $\dim M = 2$  oder  $\dim M = 3$ .<sup>8</sup>

Für den Fall, dass  $\dim M = 3$ , wird sowohl  $M$  als auch das orthogonale Komplement  $M^{\perp} = \{x \mid x \cdot y = 0, \quad \forall y \in M\} = \{x \mid x^1 = x^2 = x^3 = 0\}$  auf sich selbst abgebildet. Damit hat  $\Lambda$  direkt die Blockform (2.9) und beschreibt eine reine Rotation mit  $\mathbf{w} = 0$ .

Im Falle, dass  $\dim M = 2$ , wählen wir zwei orthonormierte Ortsvektoren  $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \in M$ . Durch eine passende Drehung  $R_1$  im Ortsraum  $\{x^0 = 0\} \supset M$  können wir erreichen, dass  $R_1\mathbf{f}_2 = (0, 1, 0)$  und  $R_1\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)$ , d. h. sie stimmen mit den entsprechenden Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  im System  $S$  überein. Betrachten wir nun die Bildvektoren  $\mathbf{f}'_2 = \Lambda\mathbf{f}_2$  und  $\mathbf{f}'_3 = \Lambda\mathbf{f}_3$ : auf Grund der Definition von  $M$  sind das wieder Ortsvektoren.

<sup>8</sup>Das Bild  $\Lambda B_0$  von  $B_0 = \{x \mid x^0 = 0\}$  ist drei-dimensional, da  $\Lambda$  invertierbar ist. Schneidet man diese Menge mit dem drei-dimensionalen Unterraum  $B_0 = \{x' \mid x' = 0\}$  erhält der Schnittmenge  $M = (\Lambda B_0) \cap B_0$  mit der Dimension  $\dim M$ . Da  $\dim(\Lambda B_0) = \dim B_0 = 3$  folgt sofort  $\dim M \leq 3$ . Aus  $\dim M + \dim[(\Lambda B_0) + B_0] = \dim(\Lambda B_0) + \dim B_0 = 6$  folgt mit  $\dim[(\Lambda B_0) + B_0] \leq 4$  sofort, dass  $\dim M \geq 2$ . Hier bezeichnet  $V + W$  die Summe der Vektorräume  $V$  und  $W$ .

Analog zu oben können wir mit einer Rotation  $R_2$  erreichen, dass  $\mathbf{f}'_2 = R_2(0, 1, 0)$  und  $\mathbf{f}'_3 = R_2(0, 0, 1)$  ist.

Definieren wir nun  $\Lambda' = \Lambda(R_2^t)\Lambda(R_1^t)$ , dann haben wir nach Konstruktion, dass die Vektoren  $x \in N$  mit  $N = \{x \mid x^0 = x^1 = 0\}$  unter  $\Lambda'$  auf sich selbst abgebildet werden. Zudem wird  $N^\perp = \{x^2 = x^3 = 0\}$  als Menge unter  $\Lambda'$  invariant gelassen.<sup>9</sup> Deshalb muss  $\Lambda'$  die Blockform (2.11) eines Boosts haben.

## 2.4 Addition von Geschwindigkeiten

Es ist unmittelbar klar, dass die galileische Geschwindigkeitsaddition  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}'$  zu Widersprüchen mit der Absolutheit der Lichtgeschwindigkeit führt. Diese verlangt nämlich, dass mit  $v = c$  auch  $v' = c$  ist, unabhängig von  $\mathbf{w}$ . Die relativistischen Formeln für die Geschwindigkeitsaddition lassen sich unmittelbar aus den Gleichungen (2.17) für einen allgemeinen Boost herleiten. Wir betrachten zwei (achsen-parallele) Bezugssysteme  $S$  und  $S'$ , dessen Koordinaten durch (2.17) verknüpft sind (d. h. sie bewegen sich mit  $\mathbf{w}$  relativ zueinander). Betrachten wir ein Objekt, welches sich auf der Bahn  $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{v}'t'$  in  $S'$  bewegt. Dasselbe Objekt wird sich im System  $S$  auf der Bahn  $\mathbf{r}(t)$  bewegen. In Vierernotation haben wir die Koordinaten  $x(t) = [ct, \mathbf{r}(t)]$  und  $x'(t') = [ct', \mathbf{r}'(t')]$ , welche durch  $x = \Lambda(\mathbf{w})^{-1}x' = \Lambda(-\mathbf{w})x'$  verknüpft sind. Mit der allgemeinen Formel für einen Boost, erhalten wir

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma[1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}')/c^2]$$

und

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt'} = \mathbf{v}' + \frac{\gamma - 1}{w^2}(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} + \gamma\mathbf{w}.$$

Das Objekt bewegt sich daher im System  $S$  mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\gamma^{-1}}{1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}')/c^2} \left[ \gamma\mathbf{w} + \frac{\gamma - 1}{w^2}(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} + \mathbf{v}' \right]. \quad (2.20)$$

Spaltet man die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  in seine Komponenten parallel ( $\mathbf{v}'_{\parallel}$ ) und senkrecht ( $\mathbf{v}'_{\perp}$ ) zu  $\mathbf{w}$  auf, erhält man die kompakte Form

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w} + \mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp}\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}')/c^2}. \quad (2.21)$$

des relativistischen Additionsgesetzes der Geschwindigkeiten. Den inversen Zusammenhang erhält man, indem man  $\mathbf{w}$  durch  $-\mathbf{w}$  ersetzt.

Im Grenzfall, dass  $w, v' \ll c$  erhält man den nichtrelativistischen Zusammenhang  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}'$ . Falls  $\mathbf{v}'$  und  $\mathbf{w}$  parallel sind ( $\mathbf{v}'_{\perp} = 0$ ), ergibt sich die vereinfachte

<sup>9</sup>Da  $N$  invariant bleibt und  $\Lambda'$  das "Skalarprodukt"  $x \cdot y$  invariant lässt, bildet  $\Lambda'$  das orthogonale Komplement auf das orthogonale Komplement ab.

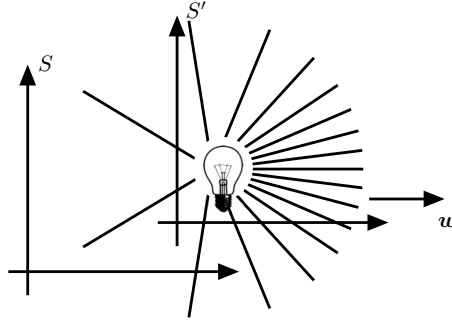


Abbildung 2.2: Wir betrachten eine Lichtquelle, die im System  $S'$  ruht und dort Licht gleichförmig in alle Richtungen ausgestrahlt wird. Wie in der Abbildung zu sehen, führt die relativistische Lichtaberration dazu, dass vom Bezugssystem  $S$  aus betrachtet mehr Licht in die Vorwärtsrichtung ausgesendet wird. Ein ähnlicher Effekt tritt auch in der nichtrelativistischen Physik auf, wenn man annimmt, dass das System  $S'$  bezüglich dem Äther ruht. Allerdings stimmen relativistischen und nichtrelativistischen Formeln nur bis erster Ordnung in  $\beta$  überein. Zudem ist die relativistische Formel (2.25) für die Aberration symmetrisch, so dass ein Beobachter im System  $S'$  denselben Effekt für eine Lichtquelle ruhend in  $S$  feststellt.

Formel  $\mathbf{v} = (\mathbf{w} + \mathbf{v}')/[1 + wv'/c^2]$ . In der Tat kann man diese auch sofort aus (2.12) mit der hyperbolischen Additionsformel  $\tanh(\chi_1 + \chi_2) = (\tanh \chi_1 + \tanh \chi_2)/(1 + \tanh \chi_1 \tanh \chi_2)$  erhalten. Für den Fall, dass  $\mathbf{v}$  orthogonal auf  $\mathbf{w}$  liegt, addieren sich die Geschwindigkeiten fast normal mit  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}'\sqrt{1 - \beta^2}$ , wobei der zusätzliche Faktor  $\gamma^{-1}$  auf Grund der Zeitdilatation des Bezugssystems  $S'$  relativ zu  $S$  auftritt.

Es ist instruktiv die Geschwindigkeitsaddition auch in Polarkoordinaten herzuleiten. Beschreibt man die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  im Bezugssystem  $S$  durch den Absolutbetrag  $v$  und den Winkel  $\theta$  via  $\cos \theta = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})/vw$  mit der relativen Geschwindigkeit der Bezugssysteme und führt analog  $v', \theta'$  im Bezugssystem  $S'$  für  $\mathbf{v}'$  ein, kann die Additionsformel (2.21) umgeschrieben werden als

$$v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{\sqrt{w^2 + v'^2 + 2wv' \cos \theta' - w^2 v'^2 \sin^2 \theta' / c^2}}{1 + wv' \cos \theta' / c^2} \quad (2.22)$$

und

$$\tan \theta = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v' \sin \theta'}{w + v' \cos \theta'}. \quad (2.23)$$

Aus (2.22) folgt sofort, dass mit  $w, v' \leq c$  auch  $v \leq c$  gilt. Damit spielt die Lichtgeschwindigkeit die Rolle einer Grenzgeschwindigkeit, die nicht überschritten werden kann.

Betrachten wir im Folgenden den Fall eines Lichtteilchens mit  $v' = c$  genauer. Es gilt mit  $v' = c$  auch  $v = c$  unabhängig von  $w \leq c$  und  $\theta'$ , was genau dem einsteinschen

Postulat entspricht. Aus der Formel (2.23) erhält man in diesem Fall die relativistische Formel

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{\beta + \cos \theta'} \quad (2.24)$$

für die Lichtaberration. Wir wollen diese Formel ein wenig umschreiben, damit die Symmetrie  $(\theta, \beta) \leftrightarrow (\theta', -\beta)$  offensichtlich wird. Aus (2.21) erhalten wir, dass  $\operatorname{sgn}(\cos \theta) = \operatorname{sgn}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{sgn}(\beta + \cos \theta')$ . Damit wird das Vorzeichen von

$$\cos \theta = \pm(1 + \tan^2 \theta)^{-1/2} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}$$

festgelegt. Nimmt man diese beiden äquivalenten Gleichungen zusammen, erhält man die symmetrische Form

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\tan \theta}{1 + 1/\cos \theta} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\theta'}{2} \quad (2.25)$$

für die Lichtaberration, siehe Abbildung 2.2. Aus dieser Aberrationsformel kann man die Transformationsformel für ein Raumwinkelelement  $d\Omega = d(\cos \theta) d\varphi$  einer Lichtquelle herleiten. Wenn man die  $z$ -Achse in Richtung der relativen Bewegung der Bezugssysteme, gilt  $d\Omega/d\Omega' = d(\cos \theta)/d(\cos \theta')$ . Durch Differentiation der Gleichung  $1 - \beta \cos \theta = (1 - \beta^2)/(1 + \beta \cos \theta')$  folgt sofort

$$d\Omega = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \theta')^2} d\Omega'. \quad (2.26)$$

## 2.5 Minkowski-Diagramme

Minkowski- bzw. Raumzeit-Diagramme können dazu verwendet werden, Probleme in der Relativitätstheorie graphisch ohne analytische Rechnung zu lösen. Sie führen zu einer einfachen Anschauung, wie Raum und Zeit in der Relativitätstheorie zu einer Raumzeit verschmelzen. In Minkowski-Diagrammen verzichtet man auf die Darstellung von zwei der drei Raumdimensionen und führt alles auf die Darstellung der Zeit und einer Ortskoordinate (entweder  $r_1$  oder  $r$ ) zurück.

### 2.5.1 Relativistische Kausalität

In der newtonschen Mechanik ist die Kausalität durch die absolute Zeit definiert. Ein Ereignis  $A$  kann  $B$  dann und nur dann beeinflussen, wenn  $t_B > t_A$  ist. In der Relativitätstheorie verliert der absolute Zeitbegriff seine Bedeutung. Zudem wird die Kausalität restriktiver, da nun  $c$  eine Maximalgeschwindigkeit für jegliche Wechselwirkung darstellt. In der Tat erfüllt die Bahn  $x = (ct, \mathbf{r})$  eines Lichtpulses, der bei  $t = 0$  in  $\mathbf{r} = 0$  ausgesendet wird

$$x \cdot x = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - r^2(t) = 0. \quad (2.27)$$

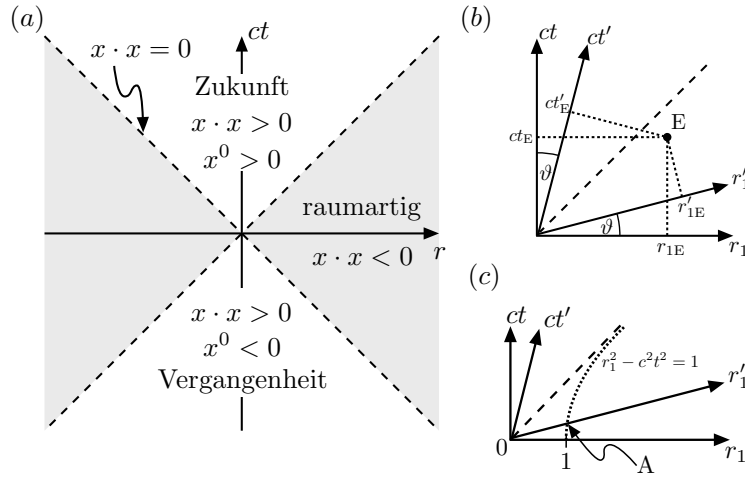


Abbildung 2.3: (a) Klassifikation aller Ereignisse bezüglich eines Referenzereignisses bei  $0 = (0, \mathbf{0})$  in Zukunft, Vergangenheit und raumartig. (b) Ein Ereignis  $E$  wird in den zwei Koordinatensystemen  $S$  und  $S'$ , welche mit der Geschwindigkeit  $w = \tan \vartheta c$  gegeneinander bewegt sind, durch die Koordinaten  $(ct_E, r_{1E})$  bzw.  $(ct'_E, r'_{1E})$  beschreiben. Die Koordinaten haben einen einfachen geometrischen Zusammenhang, welcher in der Abbildung gezeigt wird. (c) Geometrische Konstruktion mit der, ausgehend von einer Längeneinheit im  $S$ -System, die Längeneinheit im bewegten  $S'$ -System festgelegt werden kann. Dazu konstruiert man den Schnittpunkt  $A$  der Einheitshyperbel  $r_1^2 - c^2 t^2 = 1$  mit der  $r'_1$  Achse. Die Länge  $\overline{OA}$  legt somit die Längeneinheit im  $S'$ -System fest.

Es ist einfach zu sehen, dass für Objekte, welche sich mit  $v < c$  bewegen,  $x \cdot x > 0$  gilt. Die Zukunft des Ereignisses  $0 = (0, \mathbf{0})$  sind daher die Ereignisse mit  $x \cdot x \geq 0$  und  $x^0 \geq 0$ . Die Vergangenheit sind dementsprechend Ereignisse mit  $x \cdot x \geq 0$  und  $x^0 \leq 0$ ; vgl. die Diskussion nach (2.8).

Die relativistische Kausalität verlangt, dass ein Ereignis  $A$  ein anderes Ereignis  $B$  nur dann beeinflussen kann, wenn  $B$  in der Zukunft von  $A$  liegt, d. h.  $(x_B - x_A)^2 \geq 0$  und  $x_B^0 \geq x_A^0$ . Äquivalent kann ein Ereignis  $B$  von einem anderen Ereignis  $A$  nur dann beeinflusst werden, wenn  $A$  in der Vergangenheit von  $B$  liegt. Auf Grund der Tatsache, dass orthochrone Lorentz-Transformationen sowohl  $\Delta s^2$  als auch das Vorzeichen von  $\Delta x^0$  invariant lassen, stimmen alle Bezugssysteme über die Definition der Zukunft und Vergangenheit und damit der relativistischen Kausalität überein.

Ereignisse mit  $x \cdot x < 0$  sind von  $0$  raumartig entfernt und stehen daher in keinem kausalen Zusammenhang (weder Zukunft noch Vergangenheit). In der newtonschen Mechanik gibt es keine solchen raumartigen Entfernungen, da alle Ereignisse entweder in der Zukunft oder der Vergangenheit liegen. Die möglichen kausalen Zusammenhänge können schön in einem Minkowski-Diagramm zusammengefasst werden, siehe Abbildung 2.3(a).

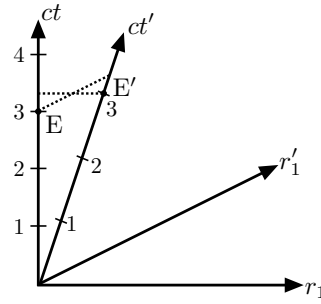


Abbildung 2.4: Darstellung in einem Minkowski-Diagramm, dass zueinander bewegte Beobachter feststellen, dass die Uhr im jeweils anderen Bezugssystem langsamer geht. Die Ereignisse  $E$  und  $E'$  finden im entsprechenden Bezugssystem jeweils um drei statt (d. h. eine ruhende Uhr zeigt 3). Der andere Beobachter ist bewegt und registriert, dass das Ereignis im anderen Bezugssystem nach 3 stattfindet. Die Situation ist daher vollkommen symmetrisch, da beide Beobachter feststellen, dass die Uhr im jeweils anderen Bezugssystem langsamer geht.

Da der Abstand  $\Delta s^2$  Lorentz-invariant ist, stimmen alle Beobachter (in Inertialsystemen) über den kausalen Zusammenhang zweier Ereignisse überein.

### 2.5.2 Lorentz-Boosts

Es ist instruktiv, sich zu überlegen, wie man einen Lorentz-Boost  $\Lambda(\chi)$  in einem Minkowski-Diagramm darstellt. Wie schon oben erwähnt, beschränken wir uns auf die Darstellung von Ereignissen mit  $x^2 = x^3 = 0$ . Damit werden Ereignisse nur noch durch ihre zweidimensionale Raumzeitkoordinaten  $(t, r_1)$  bestimmt. Lorentz-Transformationen sind keine Drehungen der  $(ct, r_1)$ -Ebene, da sie nicht den euklidischen Abstand  $c^2t^2 + r_1^2$  sondern den Minkowski-Abstand  $c^2t^2 - r_1^2$  invariant lassen. Man kann die Richtung der Koordinatenachsen des bewegten  $S'$ -Systems bezüglich des  $S$ -Systems einfach bestimmen. Die  $ct'$ -Achse ist bestimmt durch  $0 = r_1' = \gamma(r_1 - wt)$ , d. h.  $ct = (c/w)r_1$ . Somit bildet die  $ct'$ -Achse mit der  $ct$ -Achse den Winkel  $\vartheta$  mit

$$\tan \vartheta = \frac{w}{c}. \quad (2.28)$$

Wegen der Beziehung  $|w| \leq c$  erhält man sofort, dass  $|\vartheta| \leq \pi/4$  außerdem gilt  $\tan \vartheta = \tanh \chi$ . Analog erhält man, dass die Position der  $r_1'$ -Achse bestimmt ist durch  $0 = t' = \gamma(t - wr_1/c^2)$ . Damit bildet die  $r_1'$ -Achse mit der  $r_1$ -Achsen auch den Winkel  $\vartheta$ . Wie in Abbildung 2.3(b) gezeigt, werden damit die Achsen für  $w > 0$  „zusammengeklappt“.

Nach Konstruktion bewegt sich ein Lichtstrahl immer entlang der Winkelhalbierenden in die positive  $t$ -Richtung. Um die korrekte Lorentz-Transformation zwischen den Bezugssystemen zu erhalten, müssen sich die Längeneinheiten auf den Achsen

bei der Transformation ändern. Dazu können wir verwenden, dass eine Lorentz-Transformation den Abstand  $c^2t^2 - r_1^2$  invariant lässt. Insbesondere gilt für alle Ereignisse, welche sich bei der Einheitslänge befinden, dass  $r_1^2 - c^2t^2 = 1$ . Wie in Abbildung 2.3(c) ersichtlich ist, schneidet diese Einheitshyperbel die  $r'_1$ -Achse an dem Punkt A. Nach der Invarianz des Abstands muss dieser Punkt bei  $(0, 1)$  sein. Damit ist die  $r'_1$ -Achse gegenüber der  $r_1$ -Achse gestreckt.

Den Streckungsfaktor kann man durch eine einfache Überlegung erhalten: alle Punkte auf der  $r'_1$ -Achse sind im  $S$ -System gegeben durch  $\tan \vartheta = ct/r_1$ . Der Schnittpunkt mit der Einheitshyperbel liegt demnach bei  $(1 - \tan^2 \vartheta)r_1^2 = 1$ , womit man die Einheitslänge

$$\overline{0A} = \sqrt{r_1^2 + c^2t^2} = \sqrt{(1 + \tan^2 \vartheta)r_1^2} = \sqrt{\frac{1 + w^2/c^2}{1 - w^2/c^2}} \quad (2.29)$$

auf der  $r'_1$ -Achse des  $S'$ -Systems erhält. Die Längeneinheiten des  $S'$ -Koordinatensystems muss daher um den Faktor  $\overline{0A} \geq 1$  gestreckt gezeichnet werden, sowohl auf der  $r'_1$ -Achse als auch (auf Grund der Symmetrie) auf der  $ct'$ -Achse. Erst mit der Reskalierung des  $S'$ -Koordinatensystems wird die Koordinatentransformation, wie von der speziellen Relativitätstheorie verlangt, symmetrisch. Zum Beispiel zeigt Abbildung 2.4, dass jeder Beobachter feststellt, dass die Uhr im jeweilig anderen Bezugssystem langsamer geht.



# Kapitel 3

## Relativistische Mechanik

Wie wir im Kapitel 1 gesehen haben, ist die newtonsche Mechanik nicht mit dem Relativitätspostulat verträglich. In der speziellen Relativitätstheorie müssen wir daher die Gesetze der Mechanik kovariant unter Lorentz-Transformationen machen. Da Vierertensoren ein festes Transformationsverhalten aufweisen, vgl. Anhang A, müssen die Gleichungen der neuen Mechanik Tensoren derselben Stufe gleichsetzen. Als Nebenbedingung sollte sich im Grenzfall  $v \ll c$  die alte Mechanik wiederfinden.

### 3.1 Vierergeschwindigkeit

Die Bewegung eines Objektes wird durch die Bahnkurve  $\mathbf{r}(t)$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}$  festgelegt. In relativistischer Schreibweise wird die Bahn zu einer Weltlinie

$$x(\lambda) = [x^\mu(\lambda)] = [ct, \mathbf{r}(t)] = [ct(\lambda), \mathbf{r}(\lambda)] \quad (3.1)$$

mit  $\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(t(\lambda))$  und  $\lambda$  einem beliebigen Parameter, welcher die Weltlinie parametrisiert. Wie im Kapitel 2 erläutert, werden Transformationen zwischen verschiedenen Inertialsystemen von einer Lorentz-Transformation  $\Lambda$  mit  $x' = \Lambda x$  geleistet. Daher ist  $x^\mu$  ein kontravarianter Vierervektor.

Man möchte nun gerne den Begriff der Geschwindigkeit auf einen Vierervektor verallgemeinern. Um das zu erreichen, muss  $x(\tau)$  nach einem Lorentz-Skalar abgeleitet werden, welcher im Grenzfall  $v \ll c$  mit der Zeit übereinstimmt. Wie in (1.17) erläutert, bildet die Eigenzeit

$$\tau(t) = \int_0^t dt' \sqrt{1 - v(t')^2/c^2} = \int_{x(0)}^{x(t)} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} / c \quad (3.2)$$

gerade ein Lorentz-Skalar. In der Tat ergibt sich aus der Transformation  $x' = \Lambda x$  einer Weltlinie die Invarianz der Eigenzeit

$$\tau'(t') = \int_{x'(0)}^{x'(t')} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu} = \int_{x(0)}^{x(t)} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \tau(t).$$

Um die Parametrisierung in (3.1) bezugssystemunabhängig zu machen, ist es sinnvoll  $\lambda = \tau$  zu setzen. Die Ableitung der Weltlinie nach der Eigenzeit ergibt den kovarianten Vierervektor

$$u(\tau) = \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx(t)}{dt} = \gamma(t)[c, \mathbf{v}(t)] \quad (3.3)$$

mit  $\gamma(t) = [1 - v(t)^2/c^2]^{-1/2}$ , den wir als *Vierergeschwindigkeit* bezeichnen. Aus dem Vierervektor  $u^\mu$  kann man durch Kontraktion mit sich selbst einen Lorentz-Skalar erhalten. In der Tat gilt  $u \cdot u = u_\mu u^\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$  und damit ist  $u$  immer auf  $c$  normiert und nur 3 Parameter sind unabhängig.

### 3.2 Energie-Impuls-Beziehung

Mit der Vierergeschwindigkeit können wir unmittelbar den Impuls  $\mathbf{p}$  zu einem kovarianten Viererimpuls

$$(p^\mu) = (p^0, \mathbf{p}) = mu = m\gamma(c, \mathbf{v}) \quad (3.4)$$

verallgemeinern. Im nichtrelativistischen Grenzfall, wenn  $v \ll c$  und  $\gamma \rightarrow 1$ , stimmen die räumlichen Komponenten von  $p^\mu$  mit dem nichtrelativistischen Impuls überein. Der räumliche Anteil bleibt daher für ein kräftefreies Teilchen in einem Inertialsystem erhalten. Da  $p^\mu$  ein Vierervektor ist, bleibt auch der komplette Viererimpuls  $p^\mu$  in jedem Inertialsystem erhalten. Analog kann man schließen, dass der Gesamtimpuls  $P = \sum_{j=1}^N p_j$  von  $N$  Teilchen mit den Viererimpulsen  $p_j$  in jedem Inertialsystem erhalten bleibt.

Die Frage ist nun, welcher Erhaltungsgröße die Zeitkomponente  $p^0$  in der nichtrelativistischen Physik entspricht. Entwickelt man  $p^0$  nach  $v/c$  ergibt sich

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc + \frac{1}{2}mv^2/c + \dots \quad (3.5)$$

Man erkennt sofort, dass  $p^0 c$  bis auf die Konstante  $mc^2$  mit der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  der newtonschen Mechanik übereinstimmt. Dies veranlasst die Identifikation  $E = p^0 c$ , so dass

$$E = p^0 c = E_0 + E_{\text{kin}} \quad \text{mit} \quad E_0 = mc^2. \quad (3.6)$$

Die Ruheenergie  $E_0 = mc^2$  ist gerade Einsteins berühmte Formel. Die relativistische Energie enthält im Gegensatz zur nichtrelativistischen Physik einen Ruheenergiebeitrag, der nur von der Masse des Objektes abhängt. Anders als in der nichtrelativistischen Physik kann Masse in der Relativitätstheorie vernichtet werden und die entsprechende Energie in andere Energieformen umgewandelt werden.

Betrachten wir dazu als Beispiel den (symmetrischen) Zerfall eines Teilchens in zwei Teile. Im Ruhesystem des Teilchens hat man am Anfang den Viererimpuls  $P^\mu = (Mc, \mathbf{0})$  mit  $M$  der Gesamtmasse des Teilchens. Nach dem symmetrischen Zerfall ist der Gesamtimpuls  $P^\mu$  zusammengesetzt aus dem Impuls zweier Teilchen

mit Masse  $m$ , welche sich mit der Geschwindigkeit  $\pm \mathbf{v}$  bewegen. Die Teilchen haben den Viererimpuls  $\gamma m(c, \pm \mathbf{v})$  mit  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , welche sich zum Gesamtimpuls  $P^\mu = 2\gamma m(c, \mathbf{0})$  addieren. Aus der Erhaltung des Viererimpulses können wir nun folgern, dass

$$2m = M\sqrt{1 - v^2/c^2} < M; \quad (3.7)$$

d. h. die Gesamtmasse ist nicht erhalten. Die Ruheenergie des Massendefekts ist gerade gegeben durch

$$(M - 2m)c^2 = 2mc^2(\gamma - 1) = 2\frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (3.8)$$

und daher gleich der nichtrelativistischen Energie der Zerfallsprodukte (für  $v \ll c$ ). Beim Zerfall des Teilchens wird daher Ruheenergie in kinetische Energie der Zerfallsprodukte umgewandelt.

Aus der Tatsache, dass die Länge von  $p^\mu$  einen Lorentz-Skalar bildet, erhält man zudem die relativistische Energie-Impuls-Beziehung<sup>1</sup>

$$p \cdot p = p_\mu p^\mu = (E/c)^2 - p^2 = m^2 c^2, \quad (3.9)$$

welche nach Konstruktion in allen Inertialsystemen gilt.

### 3.3 Bewegungsgleichung

Mit dieser Vorarbeit ist es nun möglich, die Mechanik lorentzkovariant zu formulieren. Am einfachsten geschieht dies mit dem Lagrange-Formalismus. In diesem Formalismus ordnet man jeder Weltlinie  $x(t) = [ct, \mathbf{r}(t)]$  eine Wirkung<sup>2</sup>

$$S[r(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (3.10)$$

zu, mit der Lagrange-Funktion  $L$  und  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . Das hamiltonische Prinzip verlangt, dass die Bahn eines Teilchens durch ein Extremum der Wirkung mit  $\delta S = 0$  charakterisiert ist. Dabei werden verschiedene Weltlinien mit festgehaltenen Endpunkten  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$  und  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$  miteinander verglichen. Das Extremalprinzip führt daher mit partieller Integration auf

$$0 = \delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^3 \left[ (\partial_{r_k} L) \delta r_k + (\partial_{v_k} L) \partial_t \delta r_k \right] = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^3 \left( \partial_{r_k} L - \frac{d}{dt} \partial_{v_k} L \right) \delta r_k.$$

Da die Variation  $\delta r(t)$  mit  $\delta r(t_0) = \delta r(t_1) = 0$  beliebig ist, folgen aus dem hamiltonischen Prinzip die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} = \frac{\partial L}{\partial r_k}, \quad (3.11)$$

<sup>1</sup>Beachten Sie den Unterschied  $p \cdot p = p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$  und  $p^2 = \mathbf{p}^2 = \sum_{k=1}^3 p_k^2$ .

<sup>2</sup>Wir verwenden die Zeit  $t$  in einem Bezugssystem  $S$  als Kurvenparameter  $\lambda$ .

welche die Rolle der Bewegungsgleichungen spielen. Aus der Bedingung  $\delta S$  an die Bahn ist direkt ersichtlich, dass die Bewegungsgleichung kovariant wird, solange die Wirkung  $S$  ein Lorentz-Skalar ist.<sup>3</sup>

### 3.3.1 Kräftefreies Teilchen

In der nichtrelativistischen Mechanik wird ein kräftefreies Teilchen durch die Lagrange-Funktion  $L_0 = \frac{1}{2}mv^2$  beschrieben. Für eine relativistische Verallgemeinerung der Bewegungsgleichungen eines kräftefreien Teilchens benötigen wir eine Wirkung, welche ein Lorentz-Skalar ist und im Grenzfall  $v \ll c$  das nichtrelativistische Verhalten reproduziert. Wie wir in (3.2) gesehen haben, ordnet die Eigenzeit einer Weltlinie gerade ein Lorentz-Skalar zu. Ein natürlicher Ansatz ist daher  $S_0 = -mc^2\tau$ , wobei der Vorfaktor  $E_0$  gerade so gewählt wurde, dass  $S_0$  die Einheit einer Wirkung hat. In der Tat erhalten wir

$$S_0 = -mc^2\tau = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = \int dt \left( -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \right), \quad (3.12)$$

so dass die relativistische Lagrange-Funktion

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (3.13)$$

im Grenzfall  $v \ll c$  bis auf die Konstante  $mc^2$  gerade mit der nichtrelativistischen Lagrange-Funktion eines kräftefreien Teilchens übereinstimmt. Die relativistischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (3.14)$$

erhält man als Euler-Lagrange-Gleichungen zu  $L_0$ .

In dieser Form ist es allerdings nicht direkt ersichtlich, dass die Gleichung (3.14) kovariant ist. Um die Kovarianz explizit zu machen, bemerken wir, dass wegen der Energie-Impuls-Beziehung (3.9) mit (3.14) auch  $\dot{p}^0$  festgelegt wird. In der Tat erhalten wir durch Differentiation von (3.9) nach  $t$

$$c \frac{dp^0}{dt} = c \frac{\mathbf{p}}{p^0} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \quad (3.15)$$

so dass wir die manifestkovariante Gleichung  $dp^\mu/d\tau = 0$  finden.

### 3.3.2 Teilchen in einem Potential

In der galileischen Physik betrachtet man oft ein Teilchen in einem skalaren Potential  $V(\mathbf{r}, t)$ . Das entsprechende Problem ist in der relativistischen Mechanik nicht wirklich

<sup>3</sup>Im Prinzip können sich die Wirkungen in den verschiedenen Inertialsystemen auch um einen Faktor unterscheiden.

zielführend. Das Problem ist, dass, startend von einem skalaren Potential  $V$ , das Potential in einem anderen Bezugssystem automatisch auch von der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  abhängig wird. Deshalb ist es besser, direkt von einem Vektorpotential zu starten, das an die Geschwindigkeit koppelt. Ein weiterer Punkt ist, dass es gar keine physikalische Kraft gibt, welche durch ein skalares Potential beschrieben werden kann, da die Gravitationskraft nicht kovariant formuliert ist und daher nur die elektrodynamische Kraft in das relativistische Konzept passt.

Die Elektrodynamik kommt direkt mit einem Skalar-  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  und einem Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Die Wirkung der elektrodynamischen Felder auf ein Teilchen mit Ladung  $q$  wird in der klassischen Mechanik durch die Lagrange-Funktion

$$L = L_0 + \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\varphi \quad (3.16)$$

beschrieben. Ersetzt man nun die freie Lagrange-Funktion  $L_0 = mv^2/2$  durch die relativistische Verallgemeinerung (3.13), sieht man, dass die Wirkung

$$S = \int dt L = - \int d\tau \left( mc^2 + \frac{q}{c} u \cdot A \right) = - \int d\tau \left( mc^2 + \frac{q}{c} u^\mu A_\mu \right) \quad (3.17)$$

schon kovariant ist, falls  $A = (A^\mu) = (\varphi, \mathbf{A})$  wie ein Vierervektor transformiert.<sup>4</sup>

Für den Fall, dass  $\mathbf{A} = 0$  in einem Bezugssystem, erhält man ein Teilchens in einem skalaren Potential  $V(\mathbf{r}, t) = q\varphi(\mathbf{r}, t)$ . In diesem Spezialfall haben die Euler-Lagrange-Gleichungen die Form

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.18)$$

mit  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$  und  $\mathbf{F} = -\nabla V$  der Kraft, welche auf das Teilchen wirkt. Die Bewegungsgleichung (3.18) wird oft in der Vierernotation

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \quad (3.19)$$

geschrieben, mit  $K^\mu$  der *Minkowski-Kraft*. Die Raumkomponenten der Minkowski-Kraft ergeben sich direkt aus (3.18) als  $\mathbf{K} = \gamma \mathbf{F}$ , mit  $\gamma d\tau = dt$ . Die Zeitkomponente  $K^0$  der Minkowski-Kraft wird aus der zusätzlichen Bedingung

$$K^\mu u_\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} u_\mu = \frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = 0 \quad (3.20)$$

bestimmt, d. h. die Viererbeschleunigung  $du^\mu/d\tau \propto K^\mu$  steht immer senkrecht zur Vierergeschwindigkeit. Damit erhält man die komplette Minkowski-Kraft als<sup>5</sup>

$$(K^\mu) = \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}/c, \mathbf{F}). \quad (3.21)$$

<sup>4</sup>Wir werden im Kapitel 4 sehen, dass  $A^\mu$  sich in der Elektrodynamik gerade wie ein Vierervektor transformiert.

<sup>5</sup>Ausgeschrieben in Komponenten ergibt (3.20)  $K^\mu u_\mu = \gamma c K^0 - \gamma \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \gamma c K^0 - \gamma^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ , was man einfach nach  $K^0$  auflösen kann.

Wie für das kräftefreie Teilchen ist die 0-Komponente von (3.19) ein Ausdruck der Energieerhaltung. In der Tat erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{dp^0}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.22)$$

Damit entspricht  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$  der Leistung, welche die äußere Kraft  $\mathbf{F}$  am Teilchen leistet und  $E = cp^0$  ist (bis auf die Konstante  $mc^2$ ) der kinetischen Energie des Teilchens.

Wir wollen nun im allgemeinen Fall mit  $\mathbf{A} \neq 0$  aus  $L$  die Euler-Lagrange-Gleichungen herleiten. Dafür brauchen wir die einfach zu beweisende Zwischenresultate

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r_k} &= -q \frac{\partial \varphi}{\partial r_k} + \frac{q}{c} \sum_{l=1}^3 v_l \frac{\partial A_l}{\partial r_k}, & \frac{\partial L}{\partial v_k} &= \gamma m v_k + \frac{q}{c} A_k \\ \text{und } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} &= \frac{dp_k}{dt} + \frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial r_l} v_l \right). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= q \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial r_k} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \sum_{l=1}^3 v_l \left( \frac{\partial A_l}{\partial r_k} - \frac{\partial A_k}{\partial r_l} \right) \\ &= qE_k + \frac{q}{c} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_k \end{aligned} \quad (3.23)$$

eines Teilchens, auf das die Lorentz-Kraft  $\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c$  im elektrischen Feld  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A}/c$  und magnetischen Feld  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  wirkt.<sup>6</sup>

Beachten Sie, dass in Anwesenheit eines Vektorpotential der kanonische Impuls  $\mathbf{p}_{\text{kan}} = \partial_{\mathbf{v}} L = \mathbf{p} + q\mathbf{A}/c$  nicht mit dem kinematischen Impuls  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$  übereinstimmt. Insbesondere bezieht sich die Energie-Impuls-Beziehung (3.9) auf den kinematischen und nicht auf den kanonischen Impuls.

Man kann die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld auch in eine explizit kovariante Form bringen. Dafür definiert man den (zweifach-kovarianten) elektromagnetischen Feldstärketensor (Faraday-Tensor) als

$$F_{\mu\nu} = (dA)_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (3.24)$$

Der Tensor  $F_{\mu\nu}$  ist antisymmetrisch und hat daher 6 unabhängige Komponenten. Durch explizites nachrechnen erhält man, dass die Komponenten<sup>7</sup>

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

<sup>6</sup>Wir bezeichnen mit  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$  zwischen Dreivektoren das Vektorprodukt  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ . Für Vierervektoren wird es zum allgemeineren, äußeren Produkt  $(v \wedge w)^{\mu\nu} = v^\mu w^\nu - v^\nu w^\mu$ , siehe Kapitel 3.4.

<sup>7</sup>Im Allgemeinen enthält ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe in der Minkowski-Raumzeit gerade einen Polarvektor  $\mathbf{E}$  und einen Axialvektor  $\mathbf{B}$ .

direkt durch das elektrische und das magnetische Feld gegeben sind. Die Bewegungsgleichung lässt sich damit kovariant in der Form von (3.19) schreiben, wobei die Lorentz-Kraft zu der manifestkovarianten Minkowski-Kraft<sup>8</sup>

$$K^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu = \gamma(q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}/c, \mathbf{F}_L)^\mu \quad (3.26)$$

wird. Aus der Antisymmetrie von  $F$  erhält man direkt, dass die Nebenbedingung  $K^\mu u_\mu = 0$  erfüllt ist, vgl. Gl. (3.20).

### Teilchen in einem homogenen elektrischen Feld

Die Form der Bewegungsgleichung (3.19) stellt sicher, dass auch bei konstant wirkender Kraft, die Lichtgeschwindigkeit niemals überschritten wird. Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen mit Masse  $m$ , das einem homogenen elektrischen Feld  $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$  ausgesetzt ist. Es sei  $\mathbf{v}(0) = 0$ , so dass die Bewegung nur in die  $x$ -Richtung verläuft. Wir erhalten die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{v_1(t)}{\sqrt{1 - v_1(t)^2/c^2}} = c \frac{d \sinh \chi(t)}{dt} = \frac{qE_0}{m} = a, \quad (3.27)$$

mit der Rapidität  $\chi$  definiert durch  $v_1 = c \tanh \chi$ . Die Lösung ist daher gegeben durch  $\sinh \chi = at/c$ , was

$$v_1(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at/c)^2}} = \begin{cases} at, & |t| \ll c/a, \\ c, & |t| \gg c/a \end{cases} \quad (3.28)$$

entspricht. Obwohl die Geschwindigkeit bei  $c$  saturiert, nimmt die Energie

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_1(t)^2/c^2}} = mc^2 \sqrt{1 + (at/c)^2} \quad (3.29)$$

immer weiter zu. Dasselbe gilt wegen  $E^2 - p_1^2 c^2 = m^2 c^4$  für den relativistischen Impuls.

Es ist auch aufschlussreich, die Weltlinie eines Objektes, das eine konstante Beschleunigung erfährt zu berechnen. Die Bahn eines Raumschiffs, das sich mit einer konstanten Beschleunigung bewegt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \int_0^t dt' v_1(t') = \frac{c^2}{a} \int d\chi \sinh \chi = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + (at/c)^2} \\ &= \text{konst.} + \frac{at^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

<sup>8</sup>Man beachte, dass der magnetische Teil keine Arbeit verrichtet  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_L = \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ . Weiterhin erhält man  $F^{\mu\nu}$  durch  $F_{\mu\nu}$  mit der Ersetzung  $\mathbf{E} \mapsto -\mathbf{E}$ .

Damit ist die Bahn des Raumschiffs einfach einer Hyperbel während in der newtonschen Mechanik die Bahn eine Parabel ist. Eine wichtige Größe ist die Eigenzeit

$$\tau(t) = \int_0^t dt' \sqrt{1 - v_1(t')^2/c^2} = \frac{c}{a} \int d\chi = \frac{c \operatorname{arsinh}(at/c)}{a}, \quad (3.31)$$

welche die Zeit im lokalen Bezugssystem des Raumschiffs misst.<sup>9</sup>

Mit der Hyperbelbahn des konstant beschleunigten Raumschiffs lässt sich das Zwillingsparadoxon auflösen: am Anfangszeitpunkt  $t_0 = -T/2$  befindet sich das Raumschiff am Ort  $x_0 = r_1(-T/2)$ . Stellen wir uns nun vor, dass einer der Zwillinge in das Raumschiff einsteigt, während der andere ruhend am Ort  $x_0$  verbleibt. Zum Zeitpunkt  $t_1 = T/2$  befindet sich das Raumschiff dann wieder am selben Ort  $x_0 = r_1(T/2)$ . Für den ruhenden Zwilling ist dazwischen die Zeit  $T$  vergangen. Der andere Zwilling dagegen misst die Eigenzeit (3.31) im Raumschiff. Für ihn ist daher die kürzere Zeit

$$\tau(T/2) - \tau(-T/2) = \frac{2c \operatorname{arsinh}(aT/2c)}{a} < T \quad (3.32)$$

vergangen. Damit ist bei erneuten Zusammentreffen am Ort  $x_0$  der beschleunigte Zwilling jünger als der ruhende. Alle Beobachter werden mit dieser Aussage übereinstimmen. Anders als bei der Zeitdilatation zwischen zwei Inertialsystemen, siehe Abbildung 2.4, ist die Situation hier nicht symmetrisch, da nur einer der Zwillinge beschleunigt wurde.

### Teilchen in einem homogenen magnetischen Feld

Als zweites Beispiel wollen wir nun den Fall eines Teilchens in einem homogenen magnetischen Feld  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$  anschauen. Es sei die Anfangsbedingung  $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$  so dass die Bewegung nur in der  $xy$ -Ebene verläuft. Die Bewegungsgleichung hat die allgemeine Form

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.33)$$

Da  $E/mc^2 = \gamma$  gilt und ein Magnetfeld keine Arbeit leistet, bleibt  $\gamma$  erhalten. Setzen wir die Beziehung  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$  in (3.33) ein und schreiben die Gleichung in Komponenten, erhalten wir

$$\dot{v}_1 = \omega v_2, \quad \dot{v}_2 = -\omega v_1 \quad (3.34)$$

mit der Larmorfrequenz  $\omega = qB_0/mc\gamma$ . Die Gleichungen werden gelöst durch

$$v_1(t) = v_0 \cos(\omega t), \quad v_2(t) = -v_0 \sin(\omega t). \quad (3.35)$$

<sup>9</sup>Parametrisiert durch die Eigenzeit, hat die Bahn des Raumschiffs die einfache Form  $r_1(\tau) = (c^2/a) \cosh(c\tau/a)$ .

Eine weitere Integration führt auf die Bahnkurve

$$r_1(t) = \rho \sin(\omega t), \quad r_2 = \rho \cos(\omega t). \quad (3.36)$$

Wir erkennen, dass sich das Teilchen auf einer Kreisbahn mit Radius  $\rho = v_0/\omega = qv_0 B_0/mc\gamma$  bewegt.

Wegen der Konstanz von  $\gamma$  ist die Eigenzeit einfach gegeben durch  $\tau = t/\gamma$ . Ein Beobachter, welcher sich auf der Kreisbahn bewegt, wird daher feststellen, dass er die Eigenzeit  $2\pi/\omega\gamma$  für einen Umlauf benötigt. Auch hier gibt es keine Symmetrie zwischen den zwei Bezugssystemen, so dass alle Beobachter übereinstimmen, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\gamma\omega$  gemessen im beschleunigten Bezugssystem größer ist als die im Laborsystem.

### 3.4 Drehimpuls

In einem geschlossenen System gilt neben der Energie- und Impulserhaltung, welche sich in der Relativitätstheorie in der Erhaltung des Viererimpulses  $p^\mu$  wiederfindet, in der newtonschen Mechanik auch die Erhaltung des Drehimpulses  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ . Die Erhaltung des Drehimpulses hat ihren Ursprung in der Isotropie der physikalischen Gesetze.

Es zeigt sich, dass die relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses auf den antisymmetrischen Drehimpulstensor<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= (\mathbf{x} \wedge \mathbf{p})^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -cN^1 & -cN^2 & -cN^3 \\ cN^1 & 0 & L_3 & -L_2 \\ cN^2 & -L_3 & 0 & L_1 \\ cN^3 & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \\ &= \left( \begin{array}{c|c} 0 & -c\mathbf{N}^t \\ \hline c\mathbf{N} & \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

führt, vgl. (3.25). Hier haben wir den neuen Vektor  $\mathbf{N} = (E/c^2)\mathbf{r} - \mathbf{p}t = m\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$  mit  $\gamma = E/mc^2$ , vgl. (3.4), eingeführt, welcher auch das *dynamische Massenmoment* genannt wird.

Betrachten wir nun  $N$  Teilchen, welche sich in einem abgeschlossenen System befinden. Wie wir im Kapitel 3.2 am Beispiel des Viererimpulses schon gesehen haben, ist die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses  $\mathbf{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_j$  nur dann kovariant, wenn der komplette Drehimpulstensor  $L^{\mu\nu} = \sum_{j=1}^N (L_j)^{\mu\nu}$  erhalten bleibt. Damit muss auch das Massenmoment  $\mathbf{N} = \sum_{j=1}^N \mathbf{N}_j$  erhalten bleiben. Da auch die Gesamtenergie  $cP^0 =$

<sup>10</sup>Dass  $\mathbf{L}$  in der newtonschen Mechanik als Vektor aufgefasst werden kann, ist dem speziellen Status des Vektorproduktes in drei Dimensionen geschuldet. Im Allgemeinen ist  $L = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$  durch das äußere Produkt von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{p}$  gegeben. Daher ist  $L^{\mu\nu}$  ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe mit sechs unabhängigen Komponenten in der vierdimensionalen Raumzeit.

$\sum_{j=1}^N E_j$  erhalten bleibt, lässt sich die Erhaltung des dynamischen Massenmoments umschreiben als

$$\frac{c^2 \mathbf{N}}{\sum_{j=1}^N E_j} = \frac{\sum_{j=1}^N (E_j \mathbf{r}_j - c^2 \mathbf{p}_j t)}{\sum_{j=1}^N E_j} = \mathbf{R} - \mathbf{V}t = \text{konst.} \quad (3.38)$$

Damit sehen wir, dass sich der „mittlere“ Ortsvektor

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{j=1}^N E_j \mathbf{r}_j}{\sum_{j=1}^N E_j} \quad (3.39)$$

gleichmäßig mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j}{\sum_{j=1}^N E_j} \quad (3.40)$$

bewegt. Die Gleichung (3.39) liefert eine Erweiterung des Schwerpunktsbegriffs in den relativistischen Kontext. In der Tat gilt im Grenzfall, dass alle Geschwindigkeiten klein sind, dass  $E_j \approx m_j c^2$ . Damit erhalten wir die klassischen Ausdrücke

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j}{\sum_{j=1}^N m_j} \quad \text{und} \quad \mathbf{V} = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j}{\sum_{j=1}^N m_j}. \quad (3.41)$$

Es ist jedoch zu beachten, dass  $\mathbf{R}$  im Allgemeinen gerade nicht wie die Raumkomponenten eines Vierervektors transformiert. Damit hängt der Schwerpunkt auch vom Beobachter ab und ist nicht einfach relativ zu den Teilchen festgelegt.

## Kapitel 4

# Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass die Maxwell-Gleichungen schon dem einsteinschen Relativitätsprinzip genügen. Dies ist keine Überraschung, da das Prinzip auf der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen beruht; eine Tatsache, welche in den Maxwell-Gleichungen bereits berücksichtigt ist. Wir werden eine manifest kovariante Formulierung des Elektromagnetismus kennenlernen und feststellen, dass die Maxwell-Gleichungen keiner Korrektur bedürfen. In der Tat ist die spezielle Relativitätstheorie dazu da, die Mechanik mit der maxwellschen Theorie kompatibel zu machen, ohne letztere zu verändern.

### 4.1 Invarianten des Feldes

Aus dem Faraday-Tensor  $F_{\mu\nu}$  lassen sich Invarianten (Skalare) bilden, welche sich beim Übergang zu anderen Inertialsystemen nicht ändern. Diese sind wichtig, da man damit eine skalare Wirkung bekommt, deren Euler-Lagrange-Gleichungen kovariant sind. Es ist klar, dass sich aus  $F_{\mu\nu}$  der Skalar

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = B^2 - E^2 \quad (4.1)$$

und der Pseudoskalar<sup>1</sup>

$$-\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\mu\nu}F_{\sigma\tau} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (4.2)$$

bilden lassen. Der pseudoskalare Charakter von  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  ist sofort klar, da es sich um ein Produkt eines polaren ( $\mathbf{E}$ ) und eines axialen ( $\mathbf{B}$ ) Vektors handelt.

---

<sup>1</sup>Wir führen hier den total antisymmetrischen (Levi-Civita) Tensor  $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$  ein (mit der Konvention  $\varepsilon^{0123} = 1$ ). Der Levi-Civita-Tensor ist ein (invarianter) Pseudotensor, denn es gilt  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\sigma \Lambda^\delta_\tau \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \det(\Lambda) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

Durch die Invarianz von  $E^2 - B^2$  erhält man sofort, dass, falls  $E > B$  in einem Bezugssystem gilt, auch  $E' > B'$  in jedem anderen Inertialsystem gilt. Ebenso ergibt sich aus der Invarianz von  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ , dass Beobachter in allen Inertialsystemen damit übereinstimmen, ob  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  einen stumpfen oder spitzen Winkel bilden.

## 4.2 Homogene Maxwell-Gleichungen

Die homogenen Maxwell-Gleichungen koppeln nicht an Ladungen. Ihre Aussage ist, dass man zur Beschreibung der Physik der elektromagnetischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  auf die Potentiale  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  übergehen kann. In der Tat folgen die homogenen Maxwell-Gleichungen direkt aus der Existenz des Potentials  $A^\mu$ . Mit  $F_{\mu\nu} = \partial A_\nu / \partial x^\mu - \partial A_\mu / \partial x^\nu$  können wir durch einfaches Nachrechnen überprüfen, dass <sup>2</sup>

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.3)$$

gilt; hier haben wir den dualen Feldstärketensor  $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$  eingeführt, dessen Divergenz nach (4.3) verschwindet. Der duale Feldstärketensor hat die Komponenten

$$(\mathcal{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Man erhält ihn aus  $F^{\mu\nu}$  durch die Ersetzung  $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{B}$  und  $\mathbf{B} \mapsto -\mathbf{E}$ . Damit führt die Bedingung der verschwindenden Divergenz von  $\mathcal{F}$  führt auf die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\mu 0}}{\partial x^\mu} \mapsto \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{\mu j}}{\partial x^\mu} \mapsto -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} - \nabla \wedge \mathbf{E} = 0. \quad (4.5)$$

## 4.3 Wirkung des elektromagnetischen Feldes

Die Gesamtwirkung des elektromagnetischen Feldes mit  $N$  geladenen Teilchen lässt sich aus den Bestandteilen  $S = S_f + S_m + S_{mf}$  zusammensetzen. Der Anteil  $S_m$  ist die freie Wirkung der Teilchen und ist nach Kapitel 3.3.1 gegeben durch

$$S_m = - \sum_{j=1}^N m_j c^2 \int d\tau_j. \quad (4.6)$$

<sup>2</sup>Zum Beispiel gilt  $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial^2 A_\sigma / (\partial x^\tau \partial x^\mu) = 0$ , da  $\varepsilon$  antisymmetrisch in  $\tau \leftrightarrow \mu$  ist, während der Rest symmetrisch ist. Gleiches gilt auch für den zweiten Term.

Die Wechselwirkung der Teilchen mit dem elektromagnetischen Feld über die Lorentz-Kraft wird durch  $S_{mf}$  beschrieben. Nach Kapitel 3.3.2 ist dieser Anteil gegeben durch

$$S_{mf} = - \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{c} \int A(x_j) \cdot u_j d\tau_j = - \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{c} \int A(x_j) \cdot dx_j \quad (4.7)$$

mit der Ladung  $q_j$  des  $j$ -ten Teilchens, welche die Rolle der Wechselwirkungskonstanten spielt.

Den letzten Summanden  $S_f$  haben wir bis jetzt nicht kennengelernt. Er beschreibt die intrinsische Dynamik der Felder  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  bzw.  $F_{\mu\nu}$ . Im Allgemeinen folgen Feldgleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen einer Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_f$ . Aus der Lagrange-Dichte erhält man durch Integration über den Raum die Lagrange-Funktion  $L_f = \int d^3r \mathcal{L}_f$ . Nach einer weiteren Integration über die Zeit erhalten wir dann die Wirkung  $S_f = \int dt L_f = \int d\Upsilon \mathcal{L}_f$ , wobei wir das Maß  $d\Upsilon = dt dV = dt d^3r$  in der Raumzeit eingeführt haben. Mit dem allgemeinen Transformationsatz für Integrale erhält man, dass das Maß ein Lorentz-Skalar ist. In der Tat führt ein Variablenwechsel  $x' = \Lambda x$  auf  $d\Upsilon' = |\det \Lambda| d\Upsilon$  mit der Funktionaldeterminanten  $\det \Lambda = \pm 1$ . Die Eigenschaft, dass  $S_f$  ein Skalar sein muss, ist daher äquivalent dazu, dass die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_f$  ein Lorentz-Skalar ist.

Wir wissen, dass die Maxwell-Gleichungen für die elektromagnetischen Felder linear sein müssen, damit sie dem Superpositionsprinzip genügen. Daher muss  $\mathcal{L}_f$  quadratisch in  $F_{\mu\nu}$  sein. Da zudem die Maxwell-Gleichungen erster Ordnung in Zeit und Ort sind, dürfen in  $\mathcal{L}_f$  keine Ableitungen von  $F_{\mu\nu}$  vorkommen. Der einzige Skalar, der diesen Anforderungen genügt, haben wir in (4.1) kennengelernt. Wir setzen daher

$$S_f = - \frac{1}{16\pi} \int d\Upsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \int d\Upsilon (E^2 - B^2), \quad (4.8)$$

wobei der Vorfaktor so gewählt wurde, dass wir als Euler-Lagrange-Gleichungen die Maxwell-Gleichungen im gaußschen Einheitensystem erhalten.

Es ist oft hilfreich, auch die Materie durch Felder auszudrücken. Dazu geht man von den Teilchen mit den Koordinaten  $\mathbf{r}_j(t)$  über auf die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^N q_j \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)], \quad (4.9)$$

welche man meistens als kontinuierliche Funktion der Ortskoordinate  $\mathbf{r}$  auffasst. Obwohl die Ladung  $q_j$  ein Skalar ist, gilt dasselbe wegen der Lorentz-Kontraktion nicht für die Ladungsdichte. In der Tat ist erst  $dq = \rho d^3r$  invariant unter Koordinatentransformation. Weil  $d\Upsilon = dt d^3r$  auch ein Skalar ist, transformiert  $\rho$  wie  $dt$ , das heisst wie die Ortskomponente eines Vierervektors. In der Tat lässt sich der Ausdruck

(4.9) zur Viererstromdichte<sup>3</sup>

$$j^\mu = \sum_{j=1}^N q_j c \int dx_j^\mu \delta^{(4)}(x - x_j) = \sum_{j=1}^N q_j \frac{dx_j^\mu(t)}{dt} \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] = (c\rho, \mathbf{j})^\mu \quad (4.10)$$

erweitern. Die räumlichen Komponenten bilden den Stromdichtevektor

$$\mathbf{j} = \sum_{j=1}^N q_j \dot{\mathbf{r}}_j \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (4.11)$$

Es gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{dx_j^\mu}{dt} \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] + \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \nabla \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] - \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \nabla_{\mathbf{r}_j} \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Daraus folgt die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (4.13)$$

in manifest-kovarianter Schreibweise. Mit der Viererstromdichte lässt sich die Wirkung schreiben als

$$S = - \sum_{j=1}^N \int mc^2 d\tau_j - \frac{1}{c} \int d\Upsilon A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi} \int d\Upsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

## 4.4 Inhomogene Maxwell-Gleichungen

Das hamiltonsche Prinzip angewendet auf (4.14) liefert zwei Arten von Gleichung. Zuerst kann man die Felder als konstant voraussetzen und die Bahnkurven variieren. Dies führt für jedes Teilchen zu der relativistischen Bewegungsgleichung (3.23). Andererseits kann man die Bahnkurven (und damit  $j^\mu$ ) invariant lassen und die Felder variieren. Dies liefert Gleichungen, welche den Einfluss der Materie auf die Felder beschreiben. Die Gleichungen für die Felder erhält man als Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial A_\mu / \partial x^\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}, \quad (4.15)$$

für die Potentiale  $A_\mu$ . Hierbei ist zu beachten, dass die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{mf} + \mathcal{L}_f = -A_\mu j^\mu / c - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 16\pi$  keinen Beitrag des Materieanteils  $S_m$  der Wirkung enthält, da dieser nicht von  $A_\mu$  abhängt.

<sup>3</sup>Hier bezeichnet  $(x_j^\mu) = [t, \mathbf{r}_j(t)]$  die Bahn des  $j$ -ten Teilchens und  $dx_j^\mu$  die Integration entlang dieser Bahn.

Zuerst werten wir die partiellen Ableitungen der Lagrange-Dichte nach den Potentialen aus. Wir erhalten (da  $F_{\mu\nu}$  nur von  $\partial A_\mu/\partial x^\nu$  abhängt)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} j^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^\nu)} = -\frac{1}{8\pi} F^{\sigma\tau} \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^\nu)} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Damit werden die Euler-Lagrange-Gleichungen zu

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.17)$$

Setzen wir in (4.17)  $\mu = 0$ , erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (4.18)$$

Mit  $\mu = j$  ergeben sich zusätzlich die drei Gleichungen

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \wedge \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.19)$$

Zusammen bilden (4.18) und (4.19) die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Die Kovarianz dieser Gleichungen folgt direkt aus der Äquivalenz mit (4.17).

Bilden wir die Viererdivergenz von (4.17) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (4.20)$$

Die linke Seite verschwindet identisch, da sie eine Kontraktion eines symmetrischen Tensors  $\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu$  mit einem antisymmetrischen Tensor  $F^{\mu\nu}$  darstellt. Damit erhalten wir die Kontinuitätsgleichung  $\partial j^\mu/\partial x^\mu = 0$ , siehe (4.13).

## 4.5 Transformation der elektromagnetischen Felder

Da die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  Komponenten des antisymmetrischen Feldstärketensors  $F_{\mu\nu}$  sind, können wir deren Transformationsverhalten aus dem allgemeinen Transformationsgesetz  $F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\tau F_{\sigma\tau}$  herleiten. Unter einer speziellen Lorentz-Transformation erhalten wir aus  $F' = \Lambda(-\chi) F \Lambda^t(-\chi)$  nach kurzer Rechnung<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & B'_1 &= B_1, \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3), & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3), \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2), & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wie in (2.17) kann man dieses Resultat auf einen allgemeinen Lorentz-Boost verallgemeinern und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{w} \wedge \mathbf{B}_{\perp} \right), \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{w} \wedge \mathbf{E}_{\perp} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

<sup>4</sup>Man beachte, dass  $\Lambda_\mu^\nu(\chi) = \Lambda^\mu_\nu(-\chi)$ .

## 4.6 Feld einer bewegten Ladung

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen haben in der kovarianten Schreibweise die Form (4.17). Um die homogenen Gleichungen zu lösen, können wir das Potential  $A^\mu$  einführen, welches die Gleichung auf die Form

$$\square A^\mu - \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x_\mu \partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (4.23)$$

mit dem d'Alembert Operator  $\square = \partial^2/c^2 \partial t^2 - \nabla^2$ . Da die Potentiale nur bis auf einen Gradienten festgelegt sind<sup>5</sup> kann man zusätzlich die Bedingung  $\partial A^\nu/\partial x_\nu = 0$  stellen, was man die Lorenz-Eichung nennt. Damit erfüllt das Vektorpotential die Wellengleichung

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.24)$$

Man kann die allgemeine Lösung von (4.24) mit Hilfe der greenschen Funktion  $D(x)$  bestimmen, welche die inhomogene Gleichung

$$\square D(x) = \delta^{(4)}(x) \quad (4.25)$$

löst. Mit bekannten Methoden aus der Fourieranalysis kann man zeigen, dass

$$D_r(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^\mu k_\mu + i0^+ \operatorname{sgn}(k_0)} \quad (4.26)$$

die obenstehende Gleichung für  $D(x)$  löst, wobei der imaginäre Term im Nenner, wie wir unten zeigen werden, dafür sorgt, dass  $D_r(x)$  für  $x^0 < 0$  verschwindet, womit  $D_r$  zur *retardierten* greenschen Funktion wird.

Für die Integration über  $k_0$  benötigen wir die Pole des Integranden in (4.26). Diese befinden sich bei  $k_0^\pm = \pm|\mathbf{k}| - i0^+$ . Falls  $x^0 < 0$  muss der Integrationsweg wegen des Faktors  $e^{-ik_0 x^0}$  in der oberen komplexen Halbebene geschlossen werden. Da der Integrand in diesem Halbraum keine Pole hat, verschwindet das Integral. Für den Fall, dass  $x^0 > 0$ , muss der Weg in der unteren Halbebene geschlossen werden. Dabei liefern beide Pole  $k_0^\pm$  einen Beitrag, und wir erhalten<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} D_r(x) &= \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\sin(c|\mathbf{k}|t)}{|\mathbf{k}|} \\ &= \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} \frac{\sin(ckt)}{k} \\ &= \frac{\Theta(t)}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \sin(kr) \sin(ckt) = \frac{\Theta(t)}{4\pi r} \delta(ct - r) \end{aligned} \quad (4.27)$$

<sup>5</sup>Man nennt die Tatsache, dass sowohl  $A$  als auch  $A'$  auf denselben Felstärketensor  $F = F'$  führt solange  $A_\mu = A'_\mu + \partial\chi/\partial x^\mu$  mit einer beliebigen Funktion  $\chi(x)$  die *Eichfreiheit* der Maxwell-Gleichungen.

<sup>6</sup>Hier bezeichnet  $\theta$  den Winkel zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{x}$  und  $k = |\mathbf{k}|$ .

wobei  $\Theta(t)$  die Einheitssprungfunktion ist. In der Form  $D_r(x) = \Theta(x^0)\delta(x \cdot x)/2\pi$  ist es einfach zu sehen, dass die Funktion  $D_r(x)$  auch wirklich ein Lorentz-Skalar unter orthochronen Lorentz-Transformationen ist.<sup>7</sup>

Die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichung (4.24) ist daher gegeben durch

$$A^\mu(x) = A_0^\mu(x) + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_r(x-x')j^\mu(x') \quad (4.28)$$

mit  $A_0(x)$  einer Lösung der homogenen Wellengleichung. Da wir annehmen, dass die Quelle in Raum und Zeit lokalisiert ist, verschwindet im Grenzfall  $x^0 \rightarrow -\infty$  der zweite Term und  $A_0(x)$  entspricht der einlaufenden Lösung zur Anfangszeit.

Betrachten wir eine Punktladung  $q$ , welche sich auf der Bahn  $\mathbf{r}(t)$  (im System  $S$ ) bewegt, dann ist die Ladungs- und Stromdichte gegeben durch

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)], \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q \mathbf{v}(t) \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)] \quad (4.29)$$

mit  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$  der Geschwindigkeit in  $S$ . Diese Dichten können in kovarianter Form geschrieben werden, indem man die Weltlinie des Teilchens durch die Eigenzeit  $\tau$  parametrisiert. Durch einfaches Nachrechnen kann man sich überzeugen, dass die Viererstromdichte

$$j^\mu(x) = qc \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}[x - x(\tau)] \quad (4.30)$$

die kovariante Formulierung von (4.29) darstellt. Das Einsetzen von (4.30) in (4.28) (mit  $A_0^\mu(x) \equiv 0$ ) und anschließender Integration über  $x'$  liefert

$$A^\mu(x) = 2q \int d\tau u^\mu(\tau) \Theta[x^0 - x^0(\tau)] \delta[(x - x(\tau)) \cdot (x - x(\tau))]. \quad (4.31)$$

Die verbleibende Integration über  $\tau$  liefert nur bei  $\tau_{\text{ret}}$  einen Beitrag falls  $x - x(\tau_{\text{ret}})$  ein Nullvektor ist mit  $x^0 > x^0(\tau_{\text{ret}})$ ; d. h. der Beitrag kommt vom Rückwärtslichtkegel ausgehend vom Beobachtungspunkt  $x$ . Wegen der Bedingung  $|\dot{\mathbf{r}}| < c$  gibt es nur einen solchen Schnittpunkt, siehe Abbildung 4.1. Damit erhält man das Viererpotential

$$A^\mu(x) = \left[ \frac{q u^\mu(\tau)}{u_\nu(\tau)(x^\nu - x^\nu(\tau))} \right]_{\text{ret}}, \quad (4.32)$$

wobei sich „ret“ darauf bezieht, dass die Teilchenposition und die Teilchengeschwindigkeit an der retardierten Zeit  $\tau = \tau_{\text{ret}}$  ausgewertet werden müssen. Das Potential (4.32) heißt Liénard-Wiechert-Potential.

Für Anwendungen ist es oft nützlich, das Potential in Raum- und Zeitkomponenten aufzuteilen. Mit  $R \mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})$ ,  $R = c(t - t_{\text{ret}})$  erhalten wir

$$u_\mu[x^\mu - x^\mu(\tau_{\text{ret}})] = \gamma c^2(t - t_{\text{ret}}) - \gamma \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})] = \gamma c R (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c);$$

<sup>7</sup>Mit der allgemeinen Formel  $\delta[f(x)] = \sum_j \delta(x - x_j)/|f'(x_j)|$ , wobei  $x_j$  die (einfachen) Nullstellen von  $f(x)$  sind, erhält man sofort  $\Theta(t)\delta(ct - r)/r = \Theta(t)[\delta(ct - r) + \delta(ct + r)]/r = 2\Theta(t)\delta[(ct)^2 - r^2]$ .

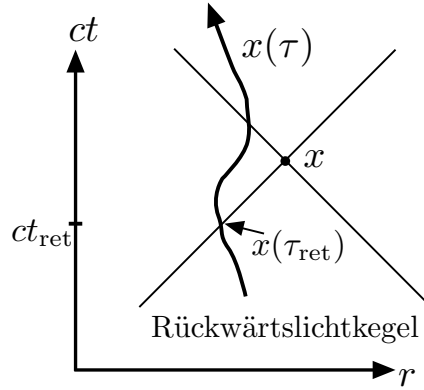


Abbildung 4.1: Nur der Schnittpunkt  $x^\mu(\tau_{\text{ret}})$  der Weltlinie  $x^\mu(\tau)$  mit dem Rückwärtslichtkegel ausgehend vom Beobachtungspunkt  $x$  liefert einen Beitrag der Ladung, welche sich auf  $x^\mu(\tau)$  bewegt, zum Potential am Punkt  $x$ .

dabei beschreibt  $R$  der Abstand und  $\mathbf{n}$  die Richtung von  $\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})$ . Somit sind die Potentiale gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)R} \right]_{\text{ret}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q\mathbf{v}/c}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)R} \right]_{\text{ret}}. \quad (4.33)$$

## 4.7 Doppler-Effekt

In der Herleitung von (4.26) haben wir den Viererwellenvektor  $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$  mit  $k_\mu x^\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  eingeführt. Aus der Elektrodynamik-Vorlesung ist bekannt, dass das elektromagnetische Feld einer monochromatischen Lichtwelle durch

$$\mathbf{E}(x) = \mathcal{E} \cos(k_\mu x^\mu) \quad \text{und} \quad \mathbf{B}(x) = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}(x) \quad (4.34)$$

gegeben ist, wobei  $\mathcal{E} \perp \mathbf{k}$  die (lineare) Polarisation festlegt und  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$  ist. Da die Maxima und Minima der elektromagnetischen Felder messbar sind, muss die Phase  $k_\mu x^\mu$  ein Lorentz-Skalar sein und damit  $k_\mu$  ein kovarianter Vierervektor. Mit (2.17) erhält man daher die Transformationsregeln

$$\omega' = \gamma(\omega - \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}), \quad \mathbf{k}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{w} \omega/c^2), \quad \mathbf{k}'_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp}. \quad (4.35)$$

Für Lichtwellen gilt die relativistische Dispersionsrelation  $k_0 = \omega/c = |\mathbf{k}|$ , so dass  $k_{\parallel}$  und  $k_{\perp}$  durch  $\omega$  und den Winkel  $\theta$  zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{w}$  festgelegt sind mit  $k_{\perp} = c\omega \sin \theta$  und  $k_{\parallel} = c\omega \cos \theta$ . Aus (4.35) erhält man, dass sich diese Größen wie

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta), \quad \tan \theta' = \frac{k'_{\perp}}{k'_{\parallel}} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)} \quad (4.36)$$

transformieren die erste Formel beschreibt die relativistischen Doppler-Verschiebung, während die zweite Formel die Lichtaberration darstellt, vgl. (2.24).

Weiterhin möchten wir die Transformationsregel der Amplitude  $\mathcal{E}$  zu bestimmen. Dafür werden wir verwenden, dass  $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{B}}$  mit  $\mathcal{B} = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathcal{E}$  eine orthonormale Basis bilden. Um die Rechnung zu vereinfachen, wählen wir das Koordinatensystem so, dass  $\mathbf{w} = (c\beta, 0, 0)^t$ . Die Felder  $\mathcal{E}, \mathcal{B}$  transformieren dann nach (4.21) und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'^2 &= \mathcal{E}_1^2 + \gamma^2(\mathcal{E}_2 - \beta\mathcal{B}_3)^2 + \gamma^2(\mathcal{E}_3 + \beta\mathcal{B}_2)^2 \\ &= \gamma^2\mathcal{E}^2[1 - 2\beta(\hat{\mathcal{E}}_2\hat{\mathcal{B}}_3 - \hat{\mathcal{E}}_3\hat{\mathcal{B}}_2) + \beta^2(1 - \hat{\mathcal{B}}_1^2 - \hat{\mathcal{E}}_1^2)] \\ &= \gamma^2\mathcal{E}^2(1 - 2\beta\hat{k}_1 + \beta^2\hat{k}_1^2) = \gamma^2\mathcal{E}^2(1 - \beta\hat{k}_1)^2;\end{aligned}$$

hier haben wir die Orthonormalität in der Form  $(\hat{\mathcal{E}} \wedge \hat{\mathcal{B}})_1 = \hat{\mathcal{E}}_2\hat{\mathcal{B}}_3 - \hat{\mathcal{E}}_3\hat{\mathcal{B}}_2 = \hat{k}_1$  und  $\hat{k}_1^2 + \hat{\mathcal{E}}_1^2 + \hat{\mathcal{B}}_1^2 = 1$  verwendet. Mit  $\hat{k}_1 = \cos\theta$  können wir die Transformation der Wellenamplitude im Allgemeinen schreiben als

$$\mathcal{E}' = \frac{1 - \beta \cos\theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{1 + \beta \cos\theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}}\mathcal{E}'. \quad (4.37)$$

## 4.8 Energie-Impuls-Tensor

Analog zum Übergang von der Lagrange-Funktion zu der Hamilton-Funktion in der Teilchenmechanik, kann man von der Lagrange-Dichte zur Hamilton-Dichte übergehen. Betrachten wir zuerst den Fall freier Felder mit  $S_{mf} = 0$ . Dann hängt  $\mathcal{L}$  nicht explizit von  $x_\mu$  ab und wir erwarten, dass es einen Erhaltungssatz gibt, der mit der Energiedichte

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial(\partial A_\sigma/\partial x^\mu)} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_f \quad (4.38)$$

verbunden ist. In der Tat erhalten wir nach kurzer Rechnung, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( F^{\mu\sigma} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial x^\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial F_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \right) = 0,\end{aligned} \quad (4.39)$$

wobei wir im zweiten Schritt die Bewegungsgleichung  $\partial F^{\mu\sigma}/\partial x^\mu = 0$  verwendet haben. Integriert man die Gleichung (4.39) über den Raum bei fester Zeit, erhält man dass

$$0 = \int d^3r \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r T^{0\nu} + \int d^3r \frac{\partial}{\partial r^j} T^{j\nu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r T^{0\nu}, \quad (4.40)$$

wobei wir angenommen haben, dass die Felder und damit  $T^{\mu\nu}$  genügend schnell abfallen, so dass die Integration über die Divergenz keinen Beitrag gibt. Damit bekommen wir die Erhaltung  $\partial P^\mu / \partial t = 0$  des Vierervektors

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int d^3r T^{0\mu}, \quad (4.41)$$

welchen man mit dem Viererimpulsvektor des elektromagnetischen Feldes identifizieren kann.

Der Tensor  $T^{\mu\nu}$  ist durch die Eigenschaft  $\partial T^{\mu\nu} / \partial x^\mu = 0$  nicht eindeutig festgelegt. In der Tat können wir zu  $T^{\mu\nu}$  einen beliebigen Viererdivergenz  $\partial \psi^{\mu\nu\sigma} / \partial x^\sigma$  eines Tensors  $\psi$  mit  $\psi^{\mu\nu\sigma} = -\psi^{\sigma\nu\mu}$  addieren, ohne dass sich der Viererimpuls  $P^\mu$  ändert. Wir können den Energie-Impuls-Tensor eindeutig machen, indem wir die Zusatzforderung stellen, dass der vierdimensionale Drehimpulstensor  $L^{\mu\nu}$  durch die gewöhnliche Form

$$L^{\mu\nu} = \int (x^\mu dP^\nu - x^\nu dP^\mu) = \frac{1}{c} \int d^3r (x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) \quad (4.42)$$

gegeben ist. Genauso wie das Verschwinden der Viererdivergenz  $\partial T^{\mu\nu} / \partial x^\mu$  die lokale Formulierung der Viererimpulserhaltung darstellt, ergibt sich aus dem Verschwinden der Viererdivergenz  $\partial(x^\mu T^{\sigma\nu} - x^\nu T^{\sigma\mu}) / \partial x^\sigma$  die Drehimpulserhaltung  $\partial L^{\mu\nu} / \partial t = 0$ . Die lokale Form der Drehimpulserhaltung erfordert daher, dass

$$0 = \frac{\partial(x^\mu T^{\sigma\nu} - x^\nu T^{\sigma\mu})}{\partial x^\sigma} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} \quad (4.43)$$

d. h.  $T^{\mu\nu}$  ist ein symmetrischer Tensor.

Zur Symmetrisierung des Tensors in (4.38) fügen wir den Term

$$\frac{F^{\mu\sigma}}{4\pi} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(F^{\mu\sigma} A_\nu)}{\partial x^\sigma}$$

hinzu. Damit erhalten wir den korrekt-symmetrisierten Ausdruck des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right). \quad (4.44)$$

Als Nebeneffekt hängt die symmetrisierte Form von  $T^{\mu\nu}$  nur noch vom Feldstärketensor und nicht mehr direkt von den Potentialen ab. Zudem gilt, dass er spurlos ist, mit  $T^\mu{}_\mu = 0$ .

Man kann den Energie-Impuls-Tensor direkt durch die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  ausdrücken. Einsetzen von (3.25) liefert

$$(T^{\mu\nu}) = \left( \begin{array}{c|c} u & \mathbf{S}/c \\ \hline \mathbf{S}/c & -\sigma \end{array} \right) \quad (4.45)$$

mit der Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2), \quad (4.46)$$

dem Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (4.47)$$

und dem maxwellschen Spannungstensor

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_k E_l + B_k B_l - \frac{1}{2} \delta_{kl} (E^2 + B^2) \right]. \quad (4.48)$$

Der lokale Erhaltungssatz  $\partial T^{\mu\nu} / \partial x^\mu$  enthält das Poynting-Theorem (mit  $\nu = 0$ )

$$0 = \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) \quad (4.49)$$

und die Impulserhaltung (mit  $\nu = j$ )

$$0 = \frac{\partial T^{\mu j}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_j}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial r_k} \quad (4.50)$$

mit dem Impulsstromdichte  $\sigma_{jk}$ .

Durch Konstruktion ist auch die Drehimpulsdichte in der Form  $L^{\mu\nu\sigma} = T^{\mu\nu} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\nu$  erhalten,

$$\frac{\partial L^{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (T^{\mu\nu} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\nu)}{\partial x^\mu} = 0. \quad (4.51)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (4.43) erhält man lokale Erhaltungsgrößen die den Tensoren  $L^{0\mu\nu}$  entsprechen. Wie im Kapitel 3.4 besprochen besteht dieser Tensor sowohl aus der Drehimpulsdichte  $L_k \propto \varepsilon_{klm} L^{0lm}$  als auch aus dem Massenmoment  $N^k \propto L^{00k}$ , welches mit der Erhaltung der Schwerpunktbewegung zusammenhängt.

#### 4.8.1 Erhaltungssätze in Anwesenheit von geladener Materie

Bis jetzt haben wir das ladungsfreie Feld betrachtet. Sind nun geladene Teilchen vorhanden, so bekommt der Energie-Impuls-Tensor einen Beitrag der geladenen Teilchen, den wir im Folgenden bestimmen möchten. In Anwesenheit von Ladung, ergibt die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{\mu\sigma} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - F_{\nu\sigma} \frac{\partial F^{\mu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} F^{\sigma\tau} \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\nu} \right). \quad (4.52)$$

In diese Gleichung setzen wir die Maxwell-Gleichungen (4.3) und (4.17) in der Form

$$\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial F_{\tau\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\tau}, \quad \frac{\partial F^{\mu\sigma}}{\partial x^\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\sigma$$

ein und erhalten

$$\frac{\partial T^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{1}{2} F^{\sigma\tau} \frac{\partial F_{\tau\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{1}{2} F^{\sigma\tau} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^{\tau}} - F^{\mu\sigma} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{4\pi}{c} F_{\nu\sigma} j^{\sigma} \right).$$

Durch Umbenennung der Summationsindizes können wir leicht feststellen, dass sich die ersten drei Terme gerade wegheben. Wir erhalten somit das Resultat

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = -\frac{1}{c} F^{\nu\sigma} j_{\sigma}. \quad (4.53)$$

Die rechte Seite erhält die Interpretation einer lorentzischen Viererkraftdichte (Vierimpulsübertrag pro 4D-Volumenelement).

Die Zeitkomponente der Gleichung (4.53) führt zu der Energieerhaltung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (4.54)$$

und die Raumkomponente führt zu der Impulserhaltung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_j}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial r_k} = - \left[ \rho E + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \right]_j \quad (4.55)$$

des Feldes in Anwesenheit der Materie, beschrieben durch  $j^{\mu} = (\rho c, \mathbf{j})$ . Der Quellterm  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  in (4.54) beschreibt dabei genau die Leistung des Feldes auf geladene Teilchen über die Lorentzkraft  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ , siehe (3.22). Die Quelle der Impulserhaltung (4.55) ist nach dem zweites newtonsches Gesetz einfach die Lorentz-Kraft  $\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c$ .

Der Ausdruck (4.41), zeigt, dass man den Feldern (lokal) eine Energiedichte  $u = T^{00}$  und eine Impulsdichte  $\mathbf{S}_i/c^2 = T^{0i}/c$  zuordnen kann. Diese erfüllen die lokalen Erhaltungsgrößen (4.54) und (4.55). Dabei beschreibt  $\mathbf{S}$  die Energie- und  $-\sigma$  die Impulsstromdichte. Die Quellterme beschreiben den Energie- und Impulsübertrag Materie  $\leftrightarrow$  Felder.

Eine weitere Möglichkeit, die lokale Energie-Impuls-Erhaltung auszudrücken, erhält man, indem man der Materie den Energie-Impuls-Tensor

$$T_m^{\mu\nu}(x) = \sum_{j=1}^N \int d\tau_j m_j u_j^{\mu} u_j^{\nu} \delta^{(4)}(x - x_j) = \sum_{j=1}^N m_j u_j^{\nu}(t) \frac{dx_j^{\mu}(t)}{dt} \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] \quad (4.56)$$

zuordnet, vgl. (4.10). Die Divergenz des Energie-Impuls-Tensor der Materie ist gegeben durch

$$\frac{\partial T_m^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = \sum_{j=1}^N m_j c \frac{du_j^{\nu}}{dt} \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] \quad (4.57)$$

wobei wir (4.12) benutzt haben. Die Teilchen mit Ladung  $q_j$  erfüllen die Bewegungsgleichung

$$m_j \frac{du_j^{\nu}}{d\tau} = \frac{q_j}{c} F^{\nu\sigma} u_{\sigma} \quad (4.58)$$

siehe (3.26), oder äquivalent

$$m_j \frac{du_j^\nu}{dt} = \frac{q_j}{c} F^{\nu\sigma} \frac{dx_{j\sigma}}{dt}. \quad (4.59)$$

Damit erhalten wir das Resultat

$$\frac{\partial T_m^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} F^{\nu\sigma} j_\sigma \quad (4.60)$$

für die Divergenz des Energie-Impuls-Tensor der Materie. Ein Vergleich mit (4.53) zeigt, dass die Energieerhaltung des Gesamtsystems

$$\frac{\partial T_{\text{tot}}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (T^{\mu\nu} + T_m^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.61)$$

gilt.

### 4.8.2 Energie-Impuls-Tensor makroskopischer Körper

Analog zu (4.9) möchten wir eine Ansammlung von Massenpunkten als kontinuierliches System auffassen mit der Massendichte

$$\mu(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^N m_j \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)]. \quad (4.62)$$

Wir beschreiben zunächst den Energie-Impuls-Tensor  $T_r^{\mu\nu}$  im lokalen Ruhesystem. Die Energiedichte  $T_r^{00} = \mu c^2$  hat dann nur den Beitrag der Ruheenergie und die Impulsdichte  $T_r^{0i}$  verschwindet,  $T_r^{i0} = T_r^{0i} = 0$ .

Wir möchten ein isotropes System beschreiben, so dass im lokalen Ruhesystem die Kraft in alle Richtungen gleich ist. Wir betrachten ein Flächenelement  $dS$  mit der Normalen  $\mathbf{n}$ . Der Impulsstrom durch dieses Flächenelement ist gerade die Kraft

$$dF_k = \sigma_{kl} n_l dS, \quad (4.63)$$

welche auf das Flächenelement wirkt. Die isotrope Kraft wird beschrieben durch den Druck  $p$  beschreiben mit

$$dF_k = -p n_k dS. \quad (4.64)$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert den Spannungstensor  $\sigma_{kl} = -p \delta_{kl}$  und damit den Energie-Impuls-Tensor

$$(T_r^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \mu c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

im lokalen Ruhesystem.

Um die Gestalt des Energie-Impuls-Tensors in einem allgemeinen Bezugssystem zu finden, muss man ihn mit der Vierergeschwindigkeit  $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$  in eine kovariante Form bringen. Der Tensor  $T^{\mu\nu}$  muss so gewählt werden, dass er im Ruhesystem mit  $u^\mu = (c, \mathbf{0})$  die obige Gestalt aufweist. Es ist einfach zu sehen, dass

$$T^{\mu\nu} = \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu} \quad (4.66)$$

dieser Anforderung genügt.<sup>8</sup> Dieser Ausdruck stellt den Energie-Impuls-Tensor eines makroskopischen Körpers dar. Aus (4.66) erhält man direkt

$$u = \frac{\mu c^2 + p v^2 / c^2}{1 - v^2 / c^2}, \quad \mathbf{S} = \frac{(\mu c^2 + p) \mathbf{v}}{1 - v^2 / c^2}, \quad \sigma_{kl} = -\frac{(\mu + p / c^2) v_k v_l}{1 - v^2 / c^2} - p \delta_{kl}.$$

Aus dem Ausdruck (4.66) folgt sofort

$$T^\mu{}_\mu = \mu c^2 - 3p. \quad (4.67)$$

Durch die Stabilitätsbedingung  $T^\mu{}_\mu \geq 0$  erhält man damit die Ungleichung<sup>9</sup>

$$p \leq \frac{\mu c^2}{3}, \quad (4.68)$$

wobei das Gleichheitszeichen für massive Teilchen nie erreicht wird.

Wie schon bei (4.44) bemerkt, findet man, dass für den Energie-Impuls-Tensor des Strahlungsfeldes (ohne Materie)  $T^\mu{}_\mu = 0$  gilt. Somit gilt für das isotrope Strahlungsfeld der Strahlungsdruck (mit  $\sigma_{kl} = -p \delta_{kl}$ )

$$p = \frac{u}{3}. \quad (4.69)$$

Die Gleichung (4.69) ist die Zustandsgleichung des elektromagnetischen Feldes. Daraus lässt sich mit Hilfe des ersten und zweiten Hauptsatzes ohne zusätzliche Annahmen das Stefan-Boltzmann-Gesetz herleiten. Nach dem ersten Hauptsatz gilt

$$dU = T dS - p dV. \quad (4.70)$$

Somit erhalten wir

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p \quad (4.71)$$

durch Ableiten nach  $V$  bei festgehaltenem  $T$ . Der zweite Hauptsatz liefert die Maxwell-Beziehung

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

<sup>8</sup>Man kann (4.66) auch durch Lorentz-Transformation des Ausdrucks im lokalen Ruhesystem erhalten.

<sup>9</sup>Man erhält diese Bedingung aus (4.56) mit  $T^\mu{}_\mu = \sum_j \int d\tau_j m_j c^2 \delta^{(4)}(x - x_j) \geq 0$ .

für die freie Energie. Aus (4.71) folgt mit  $U = uV$  und  $p = u/3$  unmittelbar

$$u(T) = \frac{T}{3} \frac{\partial u(T)}{\partial T} - \frac{u(T)}{3}. \quad (4.72)$$

Äquivalent ergibt sich

$$\frac{\partial \log u(T)}{\partial \log T} = \frac{T}{u(T)} \frac{\partial u(T)}{\partial T} = 4. \quad (4.73)$$

Die letzte Gleichung liefert nach Integration zum Stefan-Boltzmann-Gesetz  $u(T) \propto T^4$ .

### 4.8.3 Ideale Flüssigkeit

Wir betrachten eine Ansammlung von Massenpunkten mit Dichte  $\mu$  und (isotropem) Druck  $p$ , welche sich lokal mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  bewegen. Der Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$  hat die Form

$$T^{\mu\nu} = \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu}$$

mit der lokalen Vierergeschwindigkeit  $u^\mu(\mathbf{r}, t) = [c, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , siehe (4.66). Falls die Massenpunkte eine ideale Flüssigkeit ohne Viskositäten darstellen, gilt die lokale Energie-Impuls-Erhaltung<sup>10</sup>

$$0 = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) \left( u^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} + u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} \right) + u^\nu u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x^\nu}.$$

Nach Kontraktion mit  $u_\nu$  erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) \left( c^2 \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} + \overbrace{u^\mu u_\nu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}}^{=0} \right) + c^2 u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) - u^\mu \frac{\partial p}{\partial x^\mu} \\ &= c^2 \frac{\partial(\mu u^\mu)}{\partial x^\mu} + p \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall gilt  $u^\mu = (c, \mathbf{v})$  und  $p \ll \mu c^2$ . Damit vereinfacht sich (4.74) zu der Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial(\mu u^\mu)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}).$$

Subtrahieren wir von  $\partial T^{\mu\nu} / \partial x^\mu$  die Gleichung (4.74) multipliziert mit  $u^\nu / c^2$ , erhalten wir die zusätzliche Bedingungen

$$0 = \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial p}{\partial x^\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x^\mu}. \quad (4.75)$$

<sup>10</sup>Wir nehmen an, dass die Massenpunkte ungeladen sind und daher keine Kopplung an das elektromagnetische Feld stattfindet.

Im nichtrelativistischen Grenzfall reduzieren sich die räumlichen Komponenten mit  $\nu = j$  auf die Euler-Gleichungen

$$0 = \mu u^\mu \frac{\partial v_j}{\partial x^\mu} + \frac{\partial p}{\partial r_j} \Leftrightarrow \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p,$$

welche die konvektive Zeitableitung des Geschwindigkeitsfeldes mit dem Druckgradienten verbinden.

Der Energietensor der idealen Flüssigkeit spielt in der Kosmologie eine zentrale Rolle, weil die Bestandteile des Universums auf Grund ihrer schwachen Wechselwirkung sich in guter Näherung wie ideale Flüssigkeiten verhalten.

## 4.9 Thermodynamik

### 4.9.1 Schwarzkörperstrahlung

Das Relativitätsprinzip erlaubt es uns aus dem planckschen Strahlungsgesetz

$$K'_{\omega'} = \frac{\hbar \omega'^3}{4\pi^3 c^2 (e^{\hbar \omega' / k_B T} - 1)} \quad (4.76)$$

für die Intensität  $dI' = K'_{\omega'} d\omega' d\Omega'$  der Schwarzkörperstrahlung bei der Temperatur  $T$  und der Kreisfrequenz  $\omega'$  im Ruhesystem, die entsprechende Größe im dazu bewegten Laborsystem herzuleiten. Die Intensität ist durch den Betrag des Poynting-Vektors bestimmt. Für eine Lichtwelle (4.34) haben wir die Intensität  $dI \propto |\mathcal{E} \wedge \mathcal{B}| \propto \mathcal{E}^2$ . Aus (4.37) erhalten wir  $dI'/dI = \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2$  und mit den Formeln (4.36) für die Doppler-Verschiebung der Kreisfrequenz und der Transformationsformel eines Raumwinkelements

$$d\Omega' = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} d\Omega, \quad (4.77)$$

siehe (2.26), finden wir

$$K'_{\omega'} = K_\omega \gamma^3 (1 - \beta \cos \theta)^3. \quad (4.78)$$

Das planckschen Strahlungsgesetz hat damit im Laborsystem die Form

$$K_\omega = \frac{K'_{\omega'}}{\gamma^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2 [e^{(\hbar \omega / k_B T) \gamma (1 - \beta \cos \theta)} - 1]}. \quad (4.79)$$

Ein Vergleich mit (4.76) zeigt, dass sich die meisten Faktoren wegekürzen und nur die Doppler-Verschiebung  $\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$  verbleibt.

Nach der Integration von (4.79) über alle Frequenzen erhalten wir die Richtungsabhängigkeit der Intensität der Schwarzkörperstrahlung<sup>11</sup>

$$I(\theta) = \int_0^\infty d\omega K_\omega = \frac{\sigma}{\pi} \frac{T^4}{\gamma^4 (1 - \beta \cos \theta)^4} \quad (4.80)$$

<sup>11</sup>Wir verwenden das Resultat  $\int_0^\infty d\omega \omega^3 / (e^{\alpha \omega} - 1) = \pi^4 / 15 \alpha^4$ .

im Laborsystem mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten  $\sigma = \pi^2 k_B^4 / 60 \hbar^3 c^2$ . Die Intensität ist in der Vorwärtsrichtung mit  $\theta \approx 0$  am größten, siehe Abbildung 2.2.

Die Gesamtenergie, welche im Hohlraum mit dem Volumen  $V$  vorhanden ist, erhält man aus der Beziehung  $|\mathbf{S}| = cu$ , welche für elektromagnetische Strahlung gilt. Damit ergibt sich

$$U = V \int d\Omega \frac{I(\theta)}{c} = \frac{4\gamma^2(1 + \frac{1}{3}\beta^2)\sigma}{c} VT^4 = \gamma(1 + \frac{1}{3}\beta^2)U', \quad (4.81)$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass  $V' = \gamma V$ . Die Gleichung (4.81) kann man auch direkt aus der Transformation  $u = T^{00} = \Lambda^0_\mu(-\chi)\Lambda^0_\nu(-\chi)T'^{\mu\nu} = \gamma^2(u' - \beta^2\sigma'_{11}) = \gamma^2(u' + \frac{1}{3}\beta^2 u')$  erhalten, wobei wir verwendet haben, dass  $\sigma_{11} = -p = -\frac{1}{3}u$  ist, vgl. (4.69).

### 4.9.2 Ideales Gas

Wir erwarten, dass sich relativistische Effekte in der Behandlung von idealen Gasen von Teilchen der Masse  $m$  in der statistischen Mechanik bemerkbar machen, sobald die typische Geschwindigkeit  $v_{\text{typ}}$ , gegeben durch  $mv_{\text{typ}}^2 = k_B T$ , vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit wird. Wir führen daher den dimensionslosen Parameter

$$\alpha = \frac{c^2}{v_{\text{typ}}^2} = \frac{mc^2}{k_B T} \quad (4.82)$$

ein. Im nichtrelativistischen Grenzfall gilt  $\alpha \gg 1$  und man erreicht  $\alpha = 1$  bei der Temperatur  $T_c = mc^2/k_B$ . Relativistische Effekte in der Behandlung idealer Gase sind akademisch, da  $T_c$  für Wasserstoff bereits bei  $10^{13}$  K liegt. Trotzdem wollen wir die thermodynamischen Größen für ein relativistisches ideales Gas bestimmen.

Die Energie eines Teilchens ist gegeben durch die Energie-Impuls-Beziehung

$$E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (4.83)$$

Die freie Energie hat die Form  $F = -Nk_B T \log Z_1$ , wobei (mit  $p = mc \sinh \chi$ )

$$\begin{aligned} Z_1 &= V \int d^3 p e^{-E(p)/k_B T} = 4\pi V \int_0^\infty dp p^2 e^{-E(p)/k_B T} \\ &= 4\pi V m^3 c^3 \int_0^\infty d\chi \cosh \chi \sinh^2 \chi e^{-\alpha \cosh \chi} \\ &= 4\pi V m^3 c^3 \frac{K_2(\alpha)}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.84)$$

die Zustandssumme eines Teilchens ist; hier, haben wir die Macdonald-Funktion zweiter Ordnung  $K_2(x) = \int_0^\infty dt \cosh(2t) \exp(-x \cosh t)$  eingeführt. Die freie Energie ist daher bis auf eine Konstante gegeben durch

$$F(V, T, N) = -Nk_B T [\log V + \log K_2(\alpha) - \log \alpha]. \quad (4.85)$$

Die restlichen thermodynamischen Größen folgen aus den üblichen Relationen

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}, \quad U = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = -T \frac{\partial(F/T)}{\partial \log T}. \quad (4.86)$$

Die erste Gleichung ergibt die Zustandsgleichung

$$p = \frac{Nk_B T}{V}, \quad (4.87)$$

welche mit derjenigen des nichtrelativistischen idealen Gases übereinstimmt. Allerdings wird die Gleichung für die innere Energie geändert und wir haben neu (wir verwenden, dass  $d \log T = -d \log \alpha$ )

$$U = Nk_B T \left[ 1 - \alpha \frac{d \log K_2(\alpha)}{d\alpha} \right]. \quad (4.88)$$

Für  $\alpha \gg 1$  haben wir die asymptotische Form  $K_2(\alpha) \simeq \sqrt{\pi/2\alpha} e^{-\alpha}$  und daher  $d \log K_2(\alpha)/d\alpha \simeq -1 - 1/(2\alpha)$  und

$$U \simeq Nk_B T \left( \alpha + \frac{3}{2} \right) = Nmc^2 + \frac{3}{2} Nk_B T, \quad (4.89)$$

was bis auf die Ruheenergie mit dem bekannten Resultat übereinstimmt. Durch Entwicklung von  $K_2(\alpha)$  zur nächsten Ordnung bekommt man die erste relativistische Korrektur zur inneren Energie

$$\Delta U = \frac{15k_B T}{8mc^2} Nk_B T. \quad (4.90)$$

# Kapitel 5

## Allgemeine Relativitätstheorie

Wir haben bis jetzt die Bewegungsgleichung eines Teilchens nur in Inertialsystemen aufgeschrieben. Aus der klassischen Mechanik wissen wir, dass in nichtinertialen Bezugssystemen zusätzlich Scheinkräfte auftreten. Die *allgemeine Relativitätstheorie* (ART) erweitert die spezielle Relativitätstheorie, indem sie auch nichtinertiale Bezugssysteme als Bezugssysteme zulässt. Wie wir später sehen werden, wird die Gravitationskraft dann einfach als Scheinkraft in einem nichtinertialen Bezugssystem uminterpretiert.

### 5.1 Geodätengleichung

Die Beschreibung von Scheinkräften in der Relativitätstheorie ist nicht so einfach, da beschleunigte Bezugssysteme, wie wir in den Übungen schon am Beispiel der Thomas-Präzision gesehen haben, sofort zu gekrümmten Räumen führen. In diesen Räumen wird die Minkowski-Bogenlänge  $ds$ , die eine Invariante darstellt, durch den (differentiellen) Ausdruck (Metrik)<sup>1</sup>

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (5.1)$$

beschrieben, vgl. (2.4). Dieser Ausdruck ist physikalisch invariant, da  $ds/c$  die Eigenzeit eines Beobachters angibt, der sich auf einer Bahn von  $x^\mu$  nach  $x^\mu + dx^\mu$  bewegt. Hier übernimmt die koordinatenabhängige symmetrische Matrix  $g_{\mu\nu}(x)$  die Rolle der Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  in einem Inertialsystem. In einem beliebigen anderen Bezugssystem  $x'^\mu \equiv x'^\mu(x)$  gilt daher unverändert

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu . \quad (5.2)$$

Damit transformiert der metrische Tensor zweifach kovariant

$$g_{\mu'\nu'}(x) = g'_{\sigma\tau}(x') \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu} . \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup>Es ist konventionell, für das Abstandsquadrat  $ds^2 = (ds)^2$  zu schreiben, um die Anzahl der Klammern zu minimieren. Falls benötigt, benutzen wir daher Klammern im Ausdruck  $d(s^2) = 2sds$ .

Geodäten  $x(\tau)$  („kürzeste“ Verbindungen) dadurch charakterisiert, dass

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = \delta \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (5.4)$$

gilt, wobei die Endpunkte  $x^{(1)}$  und  $x^{(2)}$  festgehalten werden, vgl. (3.13). Wie bereits in Kapitel 3.3.1 gesehen, bewegen sich kräftefreie Teilchen auf Bahnen, die einem Extremum der Eigenzeit  $\int d\tau = \int ds/c$  entsprechen. Dementsprechend folgen kräftefreie Teilchen in der allgemeinen Relativitätstheorie Geodäten. Die Gravitation wirkt hier als Scheinkraft, die die explizite Form der Geodäten verändert. Sie ist damit in der Metrik „verborgen“.

Um einen Ausdruck für die Geodätengleichung zu bekommen, müssen wir die Wirkung (5.4) variieren. Es ist dabei zu beachten, dass die Variation nicht bei fester Bogenlänge, sondern bei festen Endpunkten durchzuführen ist. Daher muss man eine Parametrisierung einführen, deren Grenzen  $t^{(1)}$  und  $t^{(2)}$  fest sind, mit  $x(t^{(1)}) = x^{(1)}$  und  $x(t^{(2)}) = x^{(2)}$ , mit dem Ziel, die rechte Seite von (5.4) zu variieren. Die Variation ist auf Grund der Wurzel ziemlich mühsam. In der Praxis verwendet man daher den folgenden Trick. Man führt das Variationsproblem

$$0 = \delta \int_{(1)}^{(2)} dt [\lambda^{-1} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \lambda] \quad (5.5)$$

ein mit einer Hilfsfunktion  $\lambda(t)$ . Die Variation von  $\lambda(t)$  führt auf die Bedingung, dass  $\lambda^{-2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$ , beziehungsweise  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \lambda^2$ . Am Extremum (d.h. auf der Geodäte) ist daher (5.5) von der Form  $0 = \delta \int dt \lambda$ . Einsetzen von  $\lambda = (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} = ds/dt$  zeigt, dass das Variationsproblem (5.5) äquivalent zu (5.4) ist.

Parametrisiert man die Bahn nun durch  $c d\tau' = \lambda(t) dt$  erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{(1)}^{(2)} d\tau' \left[ \frac{g_{\mu\nu}(x)}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'} + c d\tau' \right] \\ &= \frac{1}{c} \delta \int_{(1)}^{(2)} d\tau' g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'} + \underbrace{\delta \int_{(1)}^{(2)} c d\tau'}_{=0}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Am Extremum entspricht  $d\tau' = \lambda dt/c = ds/c$  gerade der Eigenzeit  $d\tau$  auf der Geodäte.<sup>2</sup> Damit haben wir gezeigt, dass (5.4) äquivalent ist zu

$$0 = \delta \int d\tau g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \delta \int d\tau g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}, \quad (5.7)$$

solange die Bahn auf der Geodäte durch die Eigenzeit parametrisiert wird.

<sup>2</sup>Weg von der Geodäte muss  $\tau'$  natürlich verschiedenen von der Eigenzeit sein, da wir  $\tau'^{(1)}$ ,  $\tau'^{(2)}$  festhalten möchten, obwohl sich die Eigenzeit ändert.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen zum Variationsprinzip (5.7) sind die Geodätengleichung. Aus  $(d/d\tau)(\partial_{dx^\nu/d\tau}L) - \partial_{x^\nu}L = 0$  folgen mit der Lagrange-Funktion aus (5.7) die Beziehungen

$$0 = 2 \frac{d}{d\tau} \left( g_{\nu\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 2g_{\nu\beta} \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \left( 2 \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (5.8)$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit der zu  $g_{\mu\nu}$  inversen Matrix  $g^{\mu\nu}$ , erhält man die Bewegungsgleichungen (Geodätengleichung)

$$\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\beta(\tau)}{d\tau}, \quad (5.9)$$

mit  $\tau$  der Eigenzeit und den Christoffel-Symbolen<sup>3</sup> (symmetrisiert über  $\alpha \leftrightarrow \beta$ )

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right). \quad (5.10)$$

## 5.2 Äquivalenzprinzip

Bereits Newton hatte bemerkt, dass die träge Masse  $m_t$ , welche die Dynamik eines Körpers in einem Inertialsystem via  $m_t \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  bestimmt, gleich der schweren Masse  $m_s$  des Körpers ist, welche im Gravitationsgesetz  $\mathbf{F} = m_s \mathbf{g}$  auftritt. Diese Gleichheit lässt sich zum Beispiel durch Versuche mit Fadenpendeln verschiedener Zusammensetzung testen, da deren Periode proportional zu  $\sqrt{m_t/m_s}$  ist.

Geht man von der Äquivalenz schwerer und träger Masse aus, so kann man in einem homogenen und stationären Gravitationsfeld im freien Fall keine Gravitation messen. Zum Beispiel gelten für  $N$  Massenpunkte mit paarweiser Wechselwirkung  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$  im nichtrelativistischen Grenzfall die Bewegungsgleichungen

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = m_j \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k), \quad (5.11)$$

wobei die Vektoren  $\mathbf{r}_j$  bezüglich der Erde, welche die Gravitationskraft  $m_j \mathbf{g}$  erzeugt, gemessen werden. Transformiert man nun auf das mitfallende System

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2, \quad t' = t, \quad (5.12)$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}'_j = \sum_k \mathbf{F}(\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_k). \quad (5.13)$$

<sup>3</sup>Die Christoffel-Symbolen sind keine Tensoren, da sie nicht die richtige Transformationseigenschaften unter Koordinatentransformationen aufweisen.

Eine Experimentatorin im frei fallenden System findet die gleichen Gesetze der Mechanik wie ein Experimentator in einem Inertialsystem ohne Gravitationskraft.

Das *Äquivalenzprinzip* (Einstein 1907) verallgemeinert diesen Sachverhalt auf alle Naturgesetze:

Gegeben ein Ereignis in einem beliebigen Gravitationsfeld, dann lässt sich immer ein Bezugssystem finden, so dass innerhalb eines ausreichend kleinen Gebiets die Naturgesetze dieselbe Form annehmen wie in einem unbeschleunigten kartesischen Koordinatensystem in Abwesenheit von Gravitationskräften.

Ein solches Bezugssystem wird als *lokales Inertialsystem* bezeichnet.<sup>4</sup> In einem lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie. Die Gravitationskraft ist lediglich eine Scheinkraft, die durch die Wahl eines geeigneten lokalen Koordinatensystems eliminiert werden kann. Damit wird die Gleichheit von schwerer und träger Masse zur Äquivalenz. Allerdings ist die Raumzeit im Allgemeinen gekrümmt. Die Bewegungsgleichung eines kräftefreien Teilchens<sup>5</sup> wird durch die Geodätengleichung (5.9) beschrieben, wobei die rechte Seite die Rolle der Gravitationskraft (dividiert durch die Masse des Teilchens) übernimmt.

Als Beispiel betrachten wir die obige Transformation (5.12). Da das gestrichene Koordinatensystem ein lokales Inertialsystem ist, gilt in ihm der Minkowski-Ausdruck  $ds^2 = c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}'^2$  für die Eigenzeit. Da die Eigenzeit invariant ist, findet man im ungestrichenen System

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}'^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 - g^2 t^2 dt^2 + 2t \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} dt = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (5.14)$$

mit der Metrik

$$g_{\mu\nu}(x) = \left( \begin{array}{c|c} 1 - g^2 t^2 / c^2 & \mathbf{g}^t t / c \\ \hline \mathbf{g}^t t / c & -I_3 \end{array} \right). \quad (5.15)$$

Die einzigen nicht verschwindenden Elemente des Christoffel-Symbols sind dabei gegeben durch

$$\Gamma^j_{00} = -\frac{g_j}{c^2}, \quad (5.16)$$

so dass die Geodätengleichungen die Form

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \mathbf{g} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

annehmen. Die erste Gleichung wird durch  $t = \alpha\tau + \beta$  gelöst und die zweite ist dann äquivalent zum newtonschen Gesetz  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_G$  mit der Gravitationskraft  $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$ , vgl. (5.11) ohne Wechselwirkung.

<sup>4</sup>In einem lokalen Inertialsystem gilt  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$ .

<sup>5</sup>In der allgemeinen Relativitätstheorie ist ein Teilchen, auf das nur die Gravitationskraft und nicht die Lorentzkraft wirkt, ein kräftefreies Teilchen, da erstere ja nur eine Scheinkraft ist.

### 5.3 Entfernungen und Zeitintervalle

In der allgemeinen Relativitätstheorie können die Koordinaten  $x^\mu$  beliebig gewählt werden. Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Bezugssystemen stellt die invariante Eigenzeit  $d\tau = ds/c$  mit der Bogenlänge (5.1) dar. Es stellt sich daher die Frage, wie die allgemeinen Koordinaten mit den wirklichen Entfernungen und Zeitintervallen, auf die sich alle Beobachter (Koordinatensysteme) einigen können, zusammenhängen.

Wie in der SRT stellt die Eigenzeit  $\tau$  eines Raumpunktes eine kovariante Größe dar, nämlich die Zeit, welche eine Uhr im lokalen Ruhesystem messen würde. Für so eine Uhr gilt  $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$  und der Minkowski-Abstand  $ds$  ist dann einfach  $c d\tau$ . Wir erhalten daher

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} (dx^0)^2$$

und damit

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (5.17)$$

woraus sich

$$\tau = \frac{1}{c} \int dx^0 \sqrt{g_{00}} \quad (5.18)$$

als Beziehung zwischen der Eigenzeit und den Koordinaten  $x^\mu$  ergibt.

Als Nächstes wollen wir einen Ausdruck für die räumliche Entfernung  $dl$  bestimmen. Es ist nicht möglich, einfach im Ausdruck (5.1)  $dx^0 = 0$  zu setzen, da in der ART die Eigenzeit an verschiedenen Raumpunkten auf verschiedene Weise mit der Koordinate  $dx^0$  verknüpft ist.

Um die räumliche Entfernung zu definieren, verwenden wir eine ähnliche Idee, wie bei der Herleitung der Lorentz-Kontraktion in der SRT. Wir betrachten zwei infinitesimal benachbarte Raumpunkte  $A$  und  $B$  mit den Koordinaten  $x^j$  und  $x^j + dx^j$ . Wir stellen uns vor, dass am Ort  $B$  ein Lichtsignal zur Zeit  $x^0 + dx^0$  ausgesendet wird, welches bei  $A$  zur Zeit  $x^0$  reflektiert wird und zu einem späteren Zeitpunkt  $x^0 + dx^0$  am Ort  $B$  (mit festen Raumkoordinaten  $dx^j = 0$ ) wieder detektiert wird, siehe Abbildung 5.1. Die dafür benötigte Zeit  $d\tau$  (gemessen am Ort  $A$ ) ist gerade die doppelte Entfernung  $2dl/c$  zwischen den zwei Orten.

Der Minkowski-Abstand zweier Ereignisse ist gegeben durch

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k + 2g_{0j} dx^0 dx^j + g_{00} (dx^0)^2. \quad (5.19)$$

Ereignisse, welche durch ein Lichtsignal verknüpft sind, erfüllen dabei  $ds^2 = 0$ .

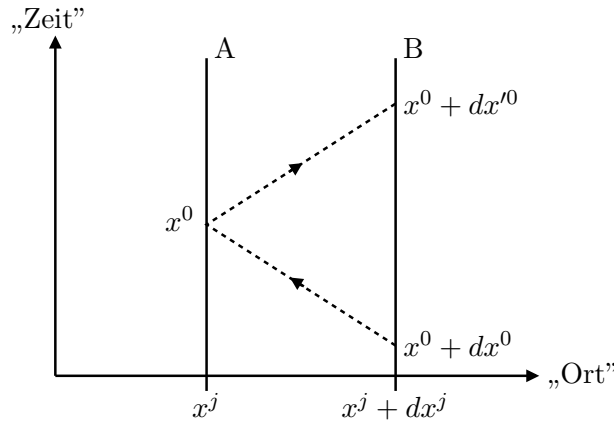


Abbildung 5.1: Synchronisation zweier benachbarten Koordinatensysteme an den Raumpunkten A und B via den Austausch von Lichtsignalen. Ein Lichtpuls wird am Ort B zur Zeit  $x^0 + dx^0$  ausgesendet, trifft den Spiegel am Ort A zur Zeit  $x^0$ , bevor er am Zeitpunkt  $x^0 + dx'^0$  wieder am Ort B eintrifft.

Auflösen von  $ds^2 = 0$  nach  $dx^0$  liefert die beiden Lösungen

$$dx^0 = \frac{1}{g_{00}} \left[ -g_{0j} dx^j - \sqrt{(g_{0j} g_{0k} - g_{jk} g_{00}) dx^j dx^k} \right]$$

$$dx'^0 = \frac{1}{g_{00}} \left[ -g_{0j} dx^j + \sqrt{(g_{0j} g_{0k} - g_{jk} g_{00}) dx^j dx^k} \right],$$

welche gerade dem Absenden und Empfangen des Lichtsignals am Ort B entsprechen. Die Eigenzeitdifferenz  $d\tau$  ist nun gerade  $dx'^0 - dx^0$  multipliziert mit dem Zeitdilationsfaktor  $\sqrt{g_{00}}/c$ . Die Entfernung  $dl$  ergibt sich daher zu

$$dl^2 = (cd\tau/2)^2 = \gamma_{jk} dx^j dx^k \quad (5.20)$$

mit der räumlichen Metrik

$$\gamma_{jk} = -g_{jk} + \frac{g_{0j} g_{0k}}{g_{00}}. \quad (5.21)$$

Es ist wichtig sich zu erinnern, dass  $\gamma_{jk}$  im Allgemeinen von  $x^0$  abhängt, so dass sich die räumliche Metrik mit der Zeit ändert. Es macht daher keinen Sinn, von Entfernungen zu sprechen, die mehr als infinitesimal sind, da Entfernungen von der Weltlinie abhängen, auf der sie gemessen werden.

Wie in der SRT können Lichtsignale auch dazu verwendet werden, Uhren an verschiedenen Raumpunkten miteinander zu synchronisieren und damit den Begriff der „Gleichzeitigkeit“ festzulegen. Betrachten wir dazu wieder den Austausch von Lichtsignalen zwischen den Raumzeitpunkten A und B. Wir definieren den Mittelwert  $x^0 + (dx'^0 + dx^0)/2c$  zwischen dem Zeitpunkt des Aussendens ( $x^0 + dx^0$ ) und des

Empfangens ( $x^0 + dx'^0$ ) des Lichtsignals am Ort  $B$  als gleichzeitig zur Zeit  $x^0$  am Ort  $A$ . Damit ist der Zeitunterschied  $\Delta t$  (gemessen mit der Zeitskala  $x^0/c$ ) zwischen der Zeit am Ort  $B$  und der Zeit am Ort  $A$  gegeben durch

$$\Delta t = \frac{1}{2c} (dx'^0 + dx^0) = -\frac{g_{0j} dx^j}{cg_{00}}. \quad (5.22)$$

Das Wissen um dem Zeitunterschied erlaubt es, die Uhren an den infinitesimal benachbarten Positionen  $A$  und  $B$  bezüglich des Beobachters  $A$  zu synchronisieren. Wir können diese Synchronisation sukzessive fortsetzen, allerdings ist es nicht möglich Uhren auf einer geschlossenen Kurve zu synchronisieren, da im Allgemeinen  $\oint \Delta t \neq 0$  gilt. Da in der allgemeinen Relativitätstheorie Uhren an verschiedenen Raumpunkten in demselben Bezugssystem unterschiedlich schnell gehen ( $g_{00}$  hängt im Allgemeinen von  $x^j$  ab) bleibt die Synchronisation auch nicht bestehen. Die Unmöglichkeit der Synchronisation der Uhren ist jedoch eine Eigenschaft des Bezugssystems, da man immer ein System wählen kann mit  $g_{0j} = 0$ .

## 5.4 Beschleunigte Bezugssysteme

In diesem Kapitel untersuchen wir zwei einfache Beispiele beschleunigter Bezugssysteme in einem flachen Minkowski-Raum. Diese Beispiele kann man auch im Rahmen der SRT abhandeln (was wir zum Teil in den Übungen gemacht haben), wobei man alles von einem Inertialsystem beschreibt und dann jeweils in das lokale Ruhesystem transformiert. Ein Beispiel war der Ausdruck (1.17) für die Eigenzeit eines allgemein beschleunigten Beobachters.

### 5.4.1 Ruhesystem eines konstant-beschleunigten Beobachters

Wir betrachten ein Bezugssystem, das einer konstanten Beschleunigung  $a$  entlang der  $x$ -Richtung ausgesetzt ist. Ein Beispiel ist das Ruhesystem eines geladenen Teilchens, welches einem homogenen elektrischen Feld  $\mathbf{E} = (am/q, 0, 0)$  ausgesetzt ist. Da die  $y$ - und  $z$ -Koordinaten von der Beschleunigung nicht betroffen sind, werden wir uns auf die  $2 \times 2$  Metrik im  $(ct, x)$ -Unterraum beschränken. Die Bahn haben wir in (3.30) bestimmt. Sie ist gegeben durch eine Hyperbel der Form

$$x = h \cosh \chi = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + (at/c)^2} \quad (5.23)$$

mit dem Scheitelpunkt  $h = c^2/a$  und  $\sinh \chi = at/c$ , d. h.  $ct = h \sinh \chi$  und  $dx/dt = c \tanh \chi$ .

Wir wollen jetzt neue Koordinaten einführen. Wir wechseln von  $x$  und  $t$  auf  $h \geq 0$  und  $\chi$ . Ein Beobachter, welcher in Ruhe bezüglich  $h$  ist, führt daher eine konstant beschleunigte Bewegung im Inertialsystem aus. Die Koordinate  $\chi$  beschreibt dabei

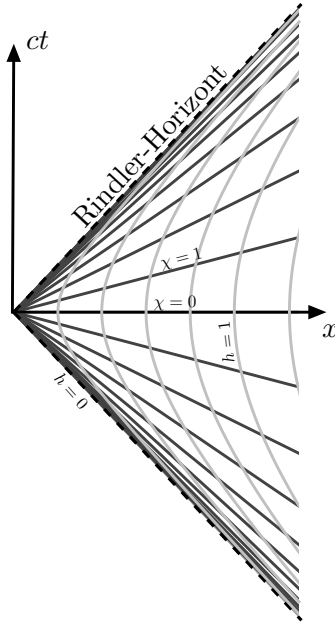


Abbildung 5.2: Die Rindler-Koordinaten sind dargestellt in der  $(t, x)$ -Ebene, welche eine flache Minkowski-Raumzeit beschreibt. Die  $\chi$ -Achsen (dunkel) verlaufen hauptsächlich horizontal und die  $h$ -Achsen (hell) vertikal. Beide werden kollinear am Rindler-Horizont mit  $x^2 = c^2 t^2$  (gestrichelte Linie).

die Rapidität (welche konstant anwächst) und  $h$  die (inverse) Beschleunigung. Wir erhalten

$$dx = \cosh \chi dh + h \sinh \chi d\chi, \quad c dt = \sinh \chi dh + h \cosh \chi d\chi$$

und daher

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = h^2 d\chi^2 - dh^2. \quad (5.24)$$

mit dem (diagonalen) metrischen Tensor

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

welcher auch *Rindler-Metrik* genannt wird. Die Rindler-Metrik bezieht sich dabei auf die Rindler-Koordinaten  $(x^\mu) = (\chi, h)$ . Dabei ist  $x^0 = \chi$  eine zeitartige Koordinate (da  $ds^2 > 0$  für  $d\chi \neq 0$  bei  $dh = 0$ ) und  $x^1 = h$  eine raumartige Koordinate (da  $ds^2 < 0$  für  $dh \neq 0$  bei  $d\chi = 0$ ). Die Eigenzeit eines konstant-beschleunigten Beobachters ( $h$  fest) ist gegeben durch

$$\tau = \frac{1}{c} \int dx^0 \sqrt{g_{00}} = \frac{1}{c} \int d\chi h = \frac{c\chi}{a} = \frac{c \operatorname{arsinh}(at/c)}{a}, \quad (5.26)$$

vgl. (3.31).

Die Rindler-Koordinaten stellen nur Ereignisse mit  $0 \leq x \leq ct$  dar, siehe Abbildung 5.2. In der Tat liegen alle Ereignisse mit  $x^2 = c^2 t^2$  bei  $h = 0$ , wo die Rindler-Metrik

nicht mehr invertierbar ist. Somit stellt  $h = 0$  den Rand der Rindler-Karte dar. Eine weitere Besonderheit der Linie  $h = 0$  kommt daher zustande, dass kein Beobachter, welcher sich mit konstanter endlicher Beschleunigung ( $h = \text{konst.}$ ) bewegt, Licht aus dem Bereich mit  $ct \geq x$  empfangen kann.<sup>6</sup> Auch kann keiner der Beobachter Licht in den Bereich mit  $ct \leq -x$  senden. Aus der Definition von  $h$  erkennt man zudem, dass beim Horizont die Beschleunigung  $a$  divergiert. In diesem Sinne stellt die Linie  $h = 0$  ein (Ereignis-)Horizont dar, der sogenannte *Rindler-Horizont*. Wie wir später sehen werden, entspricht dieser Horizont dem *Ereignishorizont* eines *Schwarzen Lochs*, da die Rindler-Metrik genau der Schwarzschild-Metrik eines Beobachters mit fester Entfernung zum Zentrum entspricht (entsprechend der Äquivalenz von Beschleunigung und Gravitation).

### 5.4.2 Geodäten

Die Geodäten der Rindler-Koordinaten sind natürlich einfach Geraden in den  $t, x$ -Koordinaten. Es ist lehrreich, die Geodätengleichung (5.9) in diesem einfachen Fall direkt zu lösen, um diese Tatsache zu „überprüfen“. Die meisten Christoffel-Symbole verschwinden. Die einzigen nichtverschwindenden Elemente sind  $\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = h^{-1}$  und  $\Gamma^1_{00} = h$ . Ausgeschrieben lauten die Geodätengleichungen (5.9) daher

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + \frac{2}{h} \frac{d\chi}{d\tau} \frac{dh}{d\tau} = 0, \quad \frac{d^2h}{d\tau^2} + h \frac{d\chi}{d\tau} \frac{d\chi}{d\tau} = 0. \quad (5.27)$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu

$$h^{-2} \frac{d}{d\tau} \left( h^2 \frac{d\chi}{d\tau} \right) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung  $d\chi/d\tau = c\alpha/h^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Zudem wissen wir, dass für ein massives Teilchen

$$c^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2} = h^2 \left( \frac{d\chi}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dh}{d\tau} \right)^2$$

gilt, woraus sich  $dh/d\tau = \pm c\sqrt{\alpha^2/h^2 - 1}$  ergibt (und damit  $h \leq \alpha$ ). Zusammen mit der Gleichung für  $d\chi/d\tau$  erhalten wir

$$\frac{dh}{d\chi} = \pm h \sqrt{1 - h^2/\alpha^2}.$$

Es ist hilfreich, die Variable  $h$  durch  $\beta$  zu ersetzen mit

$$\pm\beta = \text{artanh}(\sqrt{1 - h^2/\alpha^2}) = \text{arcosh}(\alpha/h).$$

---

<sup>6</sup>Kommunikation mit dem Bereich  $ct > x$  ist allerdings nicht prinzipiell unmöglich. Zum Beispiel kann ein Beobachter stehenbleiben und dann den Rindler-Horizont überqueren, so dass er danach Signale aus dem Bereich  $ct > x$  empfangen kann.

Somit gilt  $d \log h / d\chi = \tanh \beta$ . Man zeigt direkt, dass

$$\frac{d\beta}{d\chi} = \pm \frac{d \operatorname{arccosh}(\alpha/h)}{d \log h} \tanh \beta = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - h^2/\alpha^2}} \tanh \beta = -1$$

und damit  $\beta = -\chi + \beta_0$ ,  $\beta_0 \in \mathbb{R}$ . Für die Geschwindigkeit folgt damit

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \left[ \frac{d(h \sinh \chi)}{d\chi} \right]^{-1} \frac{d(h \cosh \chi)}{d\chi} = \frac{\tanh \chi + (d \log h / d\chi)}{1 + (d \log h / d\chi) \tanh \chi} \\ &= \tanh(\beta + \chi) = \tanh \beta_0, \end{aligned}$$

d. h. sie ist konstant entlang der Geodäten. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist die Geodäte am Ort  $x_0 = h$  mit

$$\cosh \beta = \cosh \beta_0 = \alpha/|x_0|,$$

d. h.  $x_0 = \pm \sqrt{1 - v^2/c^2} \alpha$ . Die Integrationskonstanten  $\beta_0$  und  $\alpha$  bestimmen daher die Geschwindigkeit  $v$  und die Anfangsposition  $x_0$ . Die Geodäten sind somit Geraden

$$x = x_0 + vt$$

in den ursprünglichen Koordinaten.

### 5.4.3 Unruh-Effekt

Der Unruh-Effekt kommt daher zustande, dass die Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Feldes für einen beschleunigten Beobachter wie eine Schwarzkörperstrahlung aussehen. Die Geschwindigkeit eines Beobachter der konstant beschleunigt wird ( $h$  fest) nimmt stetig zu. Daher wird die Frequenz einer Quelle im Inertialsystem immer mehr Dopplerverschoben. Als Beispiel betrachten wir eine ebene Welle proportional zu  $\psi = e^{i(x+ct)\omega/c}$ , welche sich entgegen der Beschleunigungsrichtung ausbreitet. In den Rindler-Koordinaten hat die Welle die Form

$$\psi = \exp(ihe^x\omega/c), \quad (5.28)$$

dabei entspricht der Faktor  $he^x$  gerade der Blauverschiebung. Für den beschleunigten Beobachter ( $h$  fest) hat die Welle das Spektrum<sup>7</sup>

$$S(\Omega) \propto \tilde{S}(\Omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Omega\tau} \psi \right|^2 \quad (5.29)$$

mit der Eigenzeit  $\tau = h\chi/c = c\chi/a$ .

Das Integral  $\tilde{S}$  kann berechnet werden, und wir erhalten

$$\tilde{S}(\Omega) = \frac{2\pi h}{\Omega c} \frac{1}{e^{2\pi h\Omega/c} - 1}, \quad (5.30)$$

<sup>7</sup>Man beachte, dass  $\omega \mapsto \omega + i0^+$  und  $\Omega \mapsto \Omega - i0^+$  für die Konvergenz. Diese Verschiebungen entsprechen der Beschreibung der Emission ( $\omega$ ) und Absorption ( $\Omega$ ).

unabhängig von der Frequenz  $\omega$  im Ruhesystem. Die Spektralverteilung sieht aus wie die Schwarzkörperstrahlung bei einer Temperatur

$$T_U = \frac{\hbar c}{2\pi k_B h} = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c}. \quad (5.31)$$

## 5.5 Rotierendes Bezugssystem

Wir wollen als zweites Beispiel den Fall eines gleichförmig rotierenden Bezugssystem mit Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  untersuchen. Da keine Beschleunigung entlang der Rotationsachse auftritt, beschränken wir uns auf die Diskussion der zwei Raumrichtungen orthogonal zur Rotationsachse. Wir bezeichnen die Koordinaten im unbewegten Inertialsystem mit  $t', x', y'$  mit der Metrik

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2. \quad (5.32)$$

Die (Polar-)Koordinaten im rotierenden System bezeichnen wir mit  $r, \varphi, t$ . Sie hängen via  $x' = r \cos(\varphi + \Omega t)$ ,  $y' = r \sin(\varphi + \Omega t)$ ,  $t' = t$  mit den Koordinaten im Inertialsystem zusammen. Setzen wir dies in (5.32) ein, erhalten wir

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - 2\Omega r^2 dt d\varphi, \quad (5.33)$$

was der Metrik

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} c^2 - \Omega^2 r^2 & 0 & -\Omega r^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\Omega r^2 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

in den Koordinaten  $(x^\mu) = (t, r, \varphi)$  entspricht; diese Metrik wird *Born-Metrik* genannt. Das rotierende Koordinatensystem macht nur Sinn für  $r \leq c/\Omega$ . Danach wird  $g_{00}$  negativ auf Grund der Tatsache, dass die Rotationsgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit wird.

In einem rotierenden Bezugssystem können die Uhren nicht mehr an allen Orten eindeutig synchronisiert werden. Berechnet man nämlich die Zeitdifferenz entlang einer geschlossenen Kurve parametrisiert durch  $r(\varphi)$ , erhalten wir aus (5.22)

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0j}}{g_{00}} dx^j = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \Omega^2 r^2 / c^2}. \quad (5.35)$$

Im Fall „kleiner“ Rotationsgeschwindigkeiten  $\Omega r \ll c$  können wir den Nenner entwickeln. Wir erhalten

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\varphi = \frac{2\Omega}{c^2} S \quad (5.36)$$

mit  $S$ , der von der geschlossenen Kurve umschlossenen Fläche (mit Vorzeichen).

Dieses Resultat liefert direkt die Erklärung des Sagnac-Effektes, welcher 1913 von Georges Sagnac gefunden wurde. Betrachten wir einen Lichtstrahl, der sich (z. B. in

einem Wellenleiter) entlang der Kurve  $r(\varphi)$  ausbreitet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist  $c$ , wenn die Uhren entlang der Bahn des Lichtstrahls synchronisiert sind und die Eigenzeit zur Zeitmessung herangezogen wird. Wir sind interessiert an der Laufzeitdifferenz von zwei Lichtstrahlen, welche sich mit oder entgegen der Rotationsrichtung ausbreiten in tiefster Ordnung in  $\Omega r/c$ . Der Unterschied zwischen der Weltzeit  $t$  und der Eigenzeit  $\tau$  ist gegeben durch  $1/\sqrt{g_{00}} = 1 + \mathcal{O}(\Omega r/c)^2$  und damit subdominant. Für den Lichtstrahl, der sich mit der Rotationsrichtung ausbreitet, erhalten wir mit (5.36) die Laufzeit

$$\Delta t_{\odot} = \frac{L}{c} + \frac{2\Omega}{c^2}|S|$$

mit  $L$  der Länge des Wellenleiters; der zweite Term tritt hier auf Grund der Synchronisation der Uhren auf. Entgegen der Rotationsrichtung erhalten wir hingegen die Laufzeit

$$\Delta t_{\ominus} = \frac{L}{c} - \frac{2\Omega}{c^2}|S|.$$

Damit wird die Laufzeitdifferenz  $\Delta t = 4\Omega|S|/c^2$ , was der Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = 2\pi c\Delta t/\lambda$  entspricht. Lässt man die beiden Lichtstrahlen in einem Sagnac-Interferometer miteinander interferieren, erhält man daher ein Interferenzmuster mit der Periodizität  $\Delta\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$ . Sagnac-Interferometer werden dazu verwendet, Rotationen absolut zu messen.

Als nächstes wollen wir die räumliche Metrik  $\gamma_{jk}$  bestimmen. Mit (5.21) erhalten wir

$$dt^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \Omega^2 r^2/c^2} d\varphi^2. \quad (5.37)$$

Berechnen wir damit den Kreisumfang bei festem Radius  $r$ , erhalten wir

$$U = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r}{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2/c^2}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2/c^2}} > 2\pi r.$$

Ein Beobachter im beschleunigten Bezugssystem wird dieses Resultat als hyperbolische Krümmung des Raumes interpretieren.

## 5.6 Schwaches Gravitationsfeld

In einem schwachen Gravitationsfeld  $\phi(\mathbf{r}) \ll c^2$  und bei kleinen Geschwindigkeiten sollten die Geodätengleichungen (5.9) in die newtonschen Gleichungen  $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\phi(\mathbf{r})$  übergehen. Die nichtrelativistische Wirkung für ein Teilchen im Gravitationsfeld hat die Gestalt

$$S_{\text{nr}} = \int dt (mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\phi) = -mc \int dt \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right),$$

wobei wir im Vergleich zum konventionellen Ausdruck, die Konstante  $\int dt mc^2$  (Ruheenergie) addiert haben. Ein Vergleich mit dem kovarianten Ausdruck  $-mc \int ds$ , siehe (3.12) und (5.4), liefert die Bogenlänge

$$ds = \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt. \quad (5.38)$$

Das Quadrieren dieses Ausdrucks, unter Berücksichtigung nur der führenden Terme in  $v/c$  und  $\phi/c^2$ , liefert das Resultat

$$ds^2 = (c^2 + 2\phi)dt^2 - d\mathbf{r}^2, \quad (5.39)$$

wobei wir  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  benutzt haben. Die Komponente  $g_{00}$  hat daher im nichtrelativistischen Grenzfall den Wert

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}; \quad (5.40)$$

zudem  $g_{0j} = 0$  und  $g_{jk} = -\delta_{jk}$ . Die räumliche Metrik ist daher einfach  $\gamma_{jk} = \delta_{jk}$ , d. h. der Raum ist euklidisch.

Bei der Berechnung der Christoffel-Symbole ist zu beachten, dass in der besprochenen Näherung, wegen des zusätzlichen Faktors  $c$ , die Terme  $dx^0/d\tau = c dt/d\tau$  in den Geodätengleichungen über die Terme  $dx^j/d\tau$  dominieren. Das relevante Christoffel-Symbol ist daher  $\Gamma^j_{00} = \partial\phi/c^2 \partial x^j$ , womit die Geodätengleichung zur Newtonsgleichung wird mit  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ , vgl. Gl. (5.16).

Mit dem Ausdruck (5.17) erhalten wir die gravitationelle Rotverschiebung

$$d\tau = \sqrt{1 + 2\phi/c^2} dt \approx (1 + \phi/c^2) dt, \quad (5.41)$$

d. h. die Eigenzeit eines Beobachters im Gravitationsfeld mit  $\phi < 0$  vergeht langsamer.

## 5.7 Schwarzschild-Metrik

Wir haben kennengelernt, dass Materie sich in einem allgemeinen Bezugssystem auf einer Geodäte mit  $ds > 0$  bewegt. Licht bewegt sich auf *Nullgeodäten* mit  $ds = 0$ . Mit dem Äquivalenzprinzip ist daher die Bewegung der Materie in einem beliebigen Gravitationsfeld bestimmt. Allerdings benötigt man die Metrik in einem Raum mit Körpern, welche sich mittels der Gravitationskraft gegenseitig beeinflussen. Dies leisten gerade die einsteinschen Gleichungen, welche die Feldgleichungen für den metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}(x)$  darstellen. In diesen tritt als Quelle des Feldes die Energie-Impulsverteilung der Materie und der Strahlung ein. Damit beeinflussen sich die Metrik einerseits und die Materie und die Strahlung andererseits gegenseitig – im Unterschied zur SRT. Wir werden die einsteinschen Gleichungen in dieser Einführung nicht kennenlernen können, da uns die nötigen Voraussetzungen aus der Differentialgeometrie fehlen.

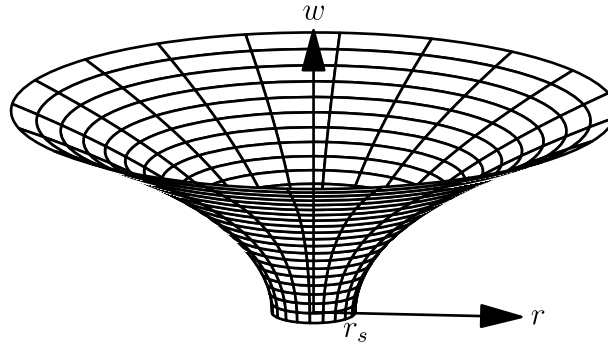


Abbildung 5.3: Flammssches Paraboloid: Räumliche Metrik der Schwarzschild-Lösung ( $dt = 0$ ). Die horizontale Ebene entspricht dem Radius  $r$  und dem Winkel  $\varphi$  (am Äquator mit  $\theta = \pi/2$ ). Die vertikale Richtung ( $w$ ) ist eine zusätzliche Dimension. Die Entfernungen auf dem Paraboloid entsprechen den raumartigen Abständen der Schwarzschild-Lösung. Das Paraboloid weist an jedem Punkt eine sattelförmige (hyperbolische) Krümmung auf.

Schwarzschild fand die sphärisch-symmetrische, exakte Lösung (*Schwarzschild-Metrik*)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.42)$$

der einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum mit einer punktförmigen Quelle am Ursprung, wobei  $r_s$  ein Parameter ist, dessen physikalische Bedeutung wir später kennenlernen werden. Die Parameter der Karte sind definiert auf  $r > r_s$ ,  $0 \leq \theta < \pi$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Für  $r \rightarrow \infty$  wird die Metrik asymptotisch zur Minkowski-Metrik (in Polarkoordinaten)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.43)$$

somit stellen  $t$  die Zeit und  $\mathbf{r}$  die Koordinaten eines (unendlich-entfernten) Beobachters in seinem Inertialsystem dar. Beim Schwarzschild-Radius  $r = r_s$  wird die Karte singulär und die Öffnung der Lichtkegel mit  $ds = 0$  strebt gegen null. Dies äußert sich darin, dass die Rotverschiebung divergiert, da die Eigenzeit gegeben ist durch

$$d\tau = \sqrt{1 - r_s/r} dt, \quad (5.44)$$

so dass für  $r \rightarrow r_s$  die Zeit für den externen Beobachter immer langsamer zu vergehen scheint. Allerdings wird nur die verwendete Karte, nicht jedoch die Metrik, singulär. Dies kann man daran erkennen, dass  $\det g = -r^4 \sin^2 \theta$  bei  $r = r_s$  nicht verschwindet. In der Tat sieht man, dass sich am Schwarzschild-Radius die Signatur der Koordinaten  $t$  und  $r$  vertauschen und somit Radius und Zeit ihre Rollen umdrehen.

Man kann sich die räumliche Metrik

$$dl^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.45)$$

der Schwarzschild-Lösung folgendermaßen vorstellen. Man reduziert die Variablen, indem man sich auf die Äquatorebene mit  $\theta = \pi/2$  beschränkt. Die Krümmung erhält man durch eine Einbettung in den euklidischen Raum (mit Zylinderkoordinaten)

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dw^2 \quad (5.46)$$

mit der zusätzlichen Dimension  $w$ . Beschränkt man den Raum auf das *flammsche Paraboloid* mit

$$w^2 = 4r_s(r - r_s), \quad (5.47)$$

siehe Abbildung 5.3, erhält man  $2w dw = 4\sqrt{r_s(r - r_s)} dw = 4r_s dr$  und damit die Metrik

$$dl^2 = \frac{r_s}{r - r_s} dr^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (5.48)$$

was genau der räumlichen Metrik der Schwarzschild-Lösung am Äquator entspricht.

Betrachten wir als Beispiel Licht, das sich Radial auf den Schwarzschild-Radius zubewegt. Da sich das Licht auf einer Nullgeodäte bewegt, ist die Bewegung bestimmt durch  $ds = d\theta = d\varphi = 0$ . Die Nullgeodätengleichung daher die einfache Form<sup>8</sup>

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (5.49)$$

und somit

$$\frac{cdt}{dr} = \pm(1 - r_s/r)^{-1}, \quad (5.50)$$

wobei das Vorzeichen  $+$  ( $-$ ) der auslaufenden (einlaufenden) radialen Nullgeodäte entspricht. Integration liefert das Resultat

$$c(t - t_0) = \pm(r + r_s \log|r - r_s|). \quad (5.51)$$

Somit wirkt es für einen unendlich entfernten Beobachter so, als ob das Licht eine unendliche Zeit braucht, um den Schwarzschild-Radius zu erreichen. Dies ist eine Manifestation der unendlichen Rotverschiebung.

Der radiale Abstand  $l$  eines Beobachters am Ort  $r$  vom Schwarzschild-Radius ist gegeben durch

$$\begin{aligned} l &= \int_{r_s}^r dl = \int_{r_s}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - r_s/r'}} \\ &= \sqrt{r(r - r_s)} + r_s \log\left(\sqrt{r/r_s - 1} + \sqrt{r/r_s}\right) > r - r_s. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Dieser Abstand ist zwar immer größer als  $r - r_s$ , aber er ist nicht unendlich. Der Schwarzschild-Radius befindet sich also für einen äußeren Beobachter durchaus in einer wohldefinierten räumlichen Entfernung, siehe Abbildung 5.3.

<sup>8</sup>Diese Form folgt auch aus der allgemeinen Geodätengleichung (5.66) mit  $V(r) = 0$ , wegen  $L = l = 0$ .

### 5.7.1 Eddington-Finkelstein-Metrik

Um die Singularität der Schwarzschild Karte zu beheben, wollen wir eine neue Zeitkoordinate  $v$  einführen, so dass die einlaufenden Nullgeodäten zu Geraden mit  $v = \text{konst.}$  werden. Dies wird erreicht durch die folgende Koordinatentransformation erreicht,

$$cv = ct + r + r_s \log |r - r_s|, \quad (5.53)$$

so dass die auslaufende radiale Nullgeodätengleichung zu  $v = t_0$  wird, vgl. (5.51). Differentiation führt auf

$$c dv = c dt + (1 - r_s/r)^{-1} dr$$

und damit erhält man die Eddington-Finkelstein-Metrik

$$ds^2 = c^2(1 - r_s/r)dv^2 - 2cdvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.54)$$

Man erkennt, dass das Linienelement regulär ist bei  $r = r_s$ . Damit setzt die Eddington-Finkelstein-Metrik die Schwarzschild-Metrik analytisch fort. Betrachtet man nun Nullgeodäten in den neuen Koordinaten, dann hat man nach Konstruktion  $v = t_0$  für die einlaufenden Geodäten. Einlaufende Lichtstrahlen passieren daher einfach den Schwarzschild-Radius.

Die auslaufende radiale Nullgeodäte ist bestimmt durch  $ds = d\theta = d\varphi = 0$ . Die Lösung mit  $dv = 0$  liefert die einlaufende Nullgeodäte. Daher finden wir für ein auslaufendes Lichtteilchen die Geodätengleichung

$$\frac{cdv}{dr} = \frac{2}{1 - r_s/r} \quad (5.55)$$

mit der Lösung [vgl. (5.50)]

$$c(v - v_0) = 2(r + r_s \log |r - r_s|), \quad (5.56)$$

oder ausgeschrieben in den ursprünglichen Koordinaten

$$c(t - t_0) = r + r_s \log |r - r_s|. \quad (5.57)$$

Damit können die auslaufenden Lichtteilchen den Schwarzschild-Radius nicht durchqueren. Die Fläche  $r = r_s$  wirkt daher wie eine halbdurchlässige Membran, welche Lichtteilchen nur von Außen nach Innen durchlässt. Daher wird der Schwarzschild-Radius auch *Ereignishorizont* genannt, da er die Grenze aller Ereignisse bildet, die prinzipiell von einem äußeren Beobachter erfasst werden können.

### 5.7.2 Nichtrelativistischer Grenzfall

Für kleine Geschwindigkeiten  $dr/dt \ll c$  und große Entfernungen  $r \gg r_s$  (das heißt im nichtrelativistischen Grenzfall) wird die Schwarzschild-Metrik zu

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.58)$$

Ein Vergleich mit (5.39) zeigt, dass die Schwarzschild-Metrik ein Gravitationspotential der Form  $\phi = -c^2 r_s/2r$  beschreibt. Für ein Objekt der Masse  $M$  gilt in der klassischen Physik  $\phi = -GM/r$  mit der Gravitationskonstanten  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ . Damit erhält man den Formel

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.59)$$

für den Schwarzschild-Radius, ausgedrückt durch Masse des Zentralobjektes. Für die Sonne mit  $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  gilt zum Beispiel  $r_s \approx 3 \text{ km}$ .

### 5.7.3 Metrik in der Nähe des Ereignishorizonts

In der Nähe des Ereignishorizonts führen wir die neue Radialkoordinate  $h$  mit  $r = r_s + h^2/4r_s$  ein. Entwicklung der Schwarzschild-Metrik für  $h \ll r_s$  führt auf die Metrik

$$ds^2 = \frac{h^2}{4r_s^2} c^2 dt^2 - dh^2 - r_s^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.60)$$

Damit ist die Raumzeit in der Nähe des Ereignishorizonts durch die Rindler-Metrik gegeben (5.24). Hier spielt die Zeit  $t$  eines unendlich entfernten Beobachters die Rolle der Rapidität mit  $\chi = ct/2r_s$  und der Abstand vom Ereignishorizont  $h$  entspricht der Beschleunigung via  $a = c^2/h$ . Damit kann man die Umgebung eines Schwarzen Loches mit Abbildung 5.2 verstehen. Der Rindler-Horizont mit  $h = 0$  spielt die Rolle des Ereignishorizonts, wo die Karte Singulär wird. Der Ereignishorizont liegt für den entfernten Beobachter bei  $t = \pm\infty$  (entspricht in der Abbildung  $\chi = \pm\infty$ ), da Objekte, welche sich darauf zubewegen immer stärker rotverschoben werden. Dadurch, dass die Schwarzschild-Metrik in der Nähe des Ereignishorizonts zur Rindler-Metrik wird, tritt auch der Unruh-Effekt dort auf. In diesem Kontext wird die Strahlung, welche vom Ereignishorizont durch Quantenfluktuationen ausgestrahlt wird, *Hawking-Strahlung* genannt. Zur Berechnung der Hawking-Temperatur  $T_H$  ist es wichtig zu berücksichtigen, dass die Strahlung, welche in der Nähe des Ereignishorizonts ausgestrahlt wird, danach rotverschoben wird, bevor sie den entfernten Beobachter (mit der Eigenzeit  $t$ ) erreichen. Wir erhalten daher das Resultat

$$T_H = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} T_U = \frac{\hbar c}{4\pi k_B r_s} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}, \quad (5.61)$$

wobei wir  $\sqrt{g_{00}}/c = h/2r_s$  und (5.31) benutzt haben. Die Hawking-Temperatur der Sonne ist damit  $T_H \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ K}$ .

### 5.7.4 Geodäten

Die Lagrange-Funktion zum Variationsprinzip der Geodäten (5.7) lautet für die Schwarzschild-Metrik

$$L = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} - r^2 \left( \frac{d\theta^2}{d\tau^2} + \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{d\tau^2} \right). \quad (5.62)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für  $\theta$

$$-\frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) + \left( r \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (5.63)$$

ist identisch erfüllt für eine Bahn in der Äquatorebene mit  $\theta = \pi/2$ , was wir o.B.d.A. voraussetzen wollen.<sup>9</sup> Damit wird die Lagrange-Funktion zu

$$L = \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} - r^2 \frac{d\varphi^2}{d\tau^2}. \quad (5.64)$$

Da die Variablen  $\varphi$  und  $t$  zyklisch sind, gelten die Erhaltungssätze  $r^2 d\varphi/d\tau = \ell$  (Drehimpuls) und  $c(1 - r_s/r) dt/d\tau = \mathcal{E}$  („Energie“). Da die Lagrange-Funktion durch  $L = (ds/d\tau)^2$  gegeben ist, bleibt auch sie erhalten. Für massive Objekte gilt  $L = c^2$ , während für Licht  $L = 0$  ist.

Einsetzen der zyklischen Variablen in (5.64) ergibt

$$L = \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \left( \mathcal{E}^2 - \frac{dr^2}{d\tau^2} \right) - \frac{\ell^2}{r^2}. \quad (5.65)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) = \mathcal{E}^2 \quad (5.66)$$

mit dem „Potential“

$$V(r) = \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \left( L + \frac{\ell^2}{r^2} \right). \quad (5.67)$$

Es ist zweckmäßig, die Variable  $u = 1/r$  einzuführen. Aus  $du/d\tau = -u^2 dr/d\tau$  und  $d\varphi/d\tau = \ell u^2$  folgt für  $u' = du/d\varphi$  das Resultat

$$u'^2 = \left( \frac{du/d\tau}{d\varphi/d\tau} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 - V}{\ell^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{\ell^2} - (1 - r_s u) \left( \frac{L}{\ell^2} + u^2 \right). \quad (5.68)$$

Leitet man die Gleichung nach  $\varphi$  ab und dividiert anschließend durch  $2u'$ , erhält man das Resultat

$$u'' + u - \frac{r_s L}{2\ell^2} = \frac{3r_s u^2}{2}. \quad (5.69)$$

Die Gleichung kann mit elliptischen Funktionen explizit gelöst werden. Im Folgenden werden wir ein paar Spezialfälle betrachten.

---

<sup>9</sup>Da das Problem kugelsymmetrisch ist, kann man immer ein Koordinatensystem wählen, so dass die Bahn in dieser Ebene verläuft.

### 5.7.5 Periheldrehung

Betrachten wir die Bewegung eines massiven Objektes mit  $L = c^2$ , dann lautet (5.69)

$$u'' + u - c^2 \frac{m}{\ell^2} = 3mu^2 \quad (5.70)$$

mit  $m = r_s/2 = GM/c^2$ . In der newtonschen Physik gilt für die Bewegung eines Körpers um ein Zentralgestirn (Kepler-Problem)

$$r^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{\ell^2}{r^2} = 2E, \quad \dot{\varphi} = \ell/r^2. \quad (5.71)$$

Damit erhalten wir für  $u = 1/r$

$$u'' + u - \frac{GM}{\ell^2} = 0. \quad (5.72)$$

Der Vergleich von (5.70) und (5.69) zeigt, dass (abgesehen von  $\mathcal{E}^2 - 1 = 2E$ ) der Term proportional zu  $u^2$  die relativistische Korrektur darstellt. Dieser Term entspricht dem Term  $\propto r^{-3}$  in (5.67).

Die allgemeine Lösung von (5.72) hat die Form

$$u_0 = \frac{1}{d}[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad (5.73)$$

mit  $d = \ell^2/GM$ . Für  $0 < \varepsilon < 1$  ist die Bahn eine Ellipse. Das Perihel befindet sich dabei bei  $\varphi = \varphi_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ . Durch eine Rotation des Koordinatensystems können wir erreichen, dass  $\varphi_0 = 0$  ist.

Als nächstes wollen wir relativistische Korrekturen zu den Kepler-Bahnen bestimmen. Dazu setzen wir  $u = u_0 + u_1$  und erhalten (in erster Ordnung in  $m$ )

$$u_1'' + u_1 = \frac{3m}{d^2}(1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi). \quad (5.74)$$

Mit den Anfangsbedingungen  $u_1 = u_1' = 0$  beim Perihel ( $\varphi = 0$ ) haben die drei Gleichungen ( $A_1 = 3m/d^2$ ,  $A_2 = 6m\varepsilon/d^2$ ,  $A_3 = 3m\varepsilon^2/d^2$ )

$$u_1'' + u_1 = \begin{cases} A_1 \\ A_2 \cos \varphi \\ A_3 \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (5.75)$$

die Lösungen

$$u_1 = \begin{cases} A_1(1 - \cos \varphi) \\ \frac{1}{2}A_2\varphi \sin \varphi \\ A_3[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos(2\varphi) - \frac{1}{3} \cos \varphi]. \end{cases} \quad (5.76)$$

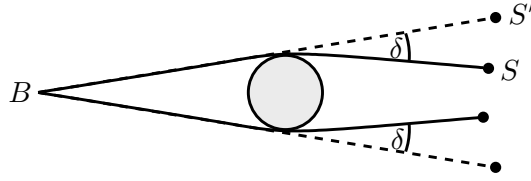


Abbildung 5.4: Skizze der Ablenkung des Lichts, welches von einem Stern an der Position  $S$  ausgesandt wird und bei  $B$  detektiert wird. Das Licht wird auf Grund der Masse der Sonne (grauer Kreis) abgelenkt und der Stern erscheint damit an der Position  $S'$  was einer Winkelverschiebung von  $\delta$  entspricht.

Nur der zweite Term liefert einen Beitrag zu

$$u'(2\pi) = A_2\pi = \frac{6\pi m\varepsilon}{d^2}. \quad (5.77)$$

Wegen  $u''(2\pi) = -\varepsilon/d$  (zur 0. Ordnung) ist die Perihel-Verschiebung (die Verschiebung der Nullstelle von  $u'$ ) gegeben durch

$$\Delta\varphi = -\frac{u'(2\pi)}{u''(2\pi)} = \frac{6\pi m}{d} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-\varepsilon^2)}, \quad (5.78)$$

wobei  $a$  die große Halbachse der Ellipsenbahn ist. Für Merkur ergibt sich  $\Delta\varphi \approx 43''$  pro Jahrhundert ( $'' = \text{Bogensekunden}$ ), was heute auf 1% bestätigt ist. Beachten Sie, dass andere Störungen etwa einen Faktor zehn mal größer sind.

### 5.7.6 Lichtablenkung

Wir betrachten als nächstes lichtartige Geodäten mit  $L = 0$ . Dann lautet (5.69)

$$u'' + u = 3mu^2. \quad (5.79)$$

Die Gleichung  $u'' + u = 0$  beschreibt gerade Lichtstrahlen mit  $u_0 = b^{-1} \sin \varphi$ , wobei das Perihel bei  $\varphi = \pi/2$  gewählt wurde und  $b$  der Stoßparameter ist. Die Nullstellen  $\varphi = 0, \pi$  von  $u_0$  entsprechen den Richtungen der Asymptote für  $r \rightarrow \infty$ .

Wie oben betrachten wir den Einfluss der ART mit Störungsrechnung. In erster Ordnung in  $m$  müssen wir die Gleichung

$$u_1'' + u_1 = \frac{3m}{b^2} \sin^2 \varphi. \quad (5.80)$$

lösen. Wir erhalten mit  $u_1 = u_1' = 0$  beim Perihel die Lösung in der Form

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{3m}{b^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(2\varphi) - \frac{1}{3} \sin \varphi \right] \\ &= \frac{\varphi}{b} + \frac{3m}{b^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) + O(m^2), \end{aligned} \quad (5.81)$$

d. h. die Nullstelle von  $u$  verschiebt sich zu  $\varphi_\infty = -2m/b$  Die Gesamtabweichung beträgt

$$\delta = 2|\varphi_\infty| = \frac{4GM}{c^2 b} \approx \frac{1,75''}{b/R_\odot}, \quad (5.82)$$

siehe Abbildung 5.4. Dieser Effekt kann bei einer totalen Sonnenfinsternis beachtet werden. Die experimentelle Übereinstimmung liegt etwa bei 1%.

### 5.7.7 Stabilität der kreisförmigen Orbits

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, für welche Radien  $r \geq r_s$  es möglich ist, eine (stabile) kreisförmige Bewegung auszuführen. Für ein Objekt auf einer kreisförmigen Bahn muss gelten, dass die Radialkraft

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r^4} (c^2 r_s r^2 - 2\ell^2 r + 3\ell^2 r_s) \quad (5.83)$$

verschwindet. Das ist dann der Fall, wenn die beiden anziehenden Kräfte, die newtonsche Gravitation (erster Term) und der relativistische Term (dritter Term), sich gegen die Zentrifugalkraft (zweiter Term) wegheben. Der Drehimpuls ist dann durch

$$\ell^2 = \frac{c^2 r^2}{2r/r_s - 3} \quad (5.84)$$

bestimmt. Für einen bestimmten Drehimpuls hat die quadratische Gleichung (5.83) die zwei Lösungen

$$r_> = \frac{\ell^2}{c^2 r_s} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{3c^2 r_s^2}{\ell^2}} \right), \quad r_< = \frac{\ell^2}{c^2 r_s} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{3c^2 r_s^2}{\ell^2}} \right) = \frac{3\ell^2}{c^2 r_>}$$

Für kleine Radien (kleiner als  $r_<$ ) dominiert in (5.83) der anziehende relativistische Term. Für Radien zwischen  $r_<$  und  $r_>$  ist die Gesamtkraft abstoßend, während sie für große Radien (größer als  $r_>$ ) wieder anziehend wird. Damit ist die Bahn bei  $r_<$  instabil gegen kleine Störungen: Wenn sich der Radius ein wenig verkleinert, wird das Teilchen zum Zentrum beschleunigt.

Die Bahn bei  $r_>$  ist stabil. Sie existiert allerdings nur für  $r \geq 3r_s$  ( $\ell^2 \leq 3r_s^2 c^2$ ). Bei  $r = 3r_s$  haben wir den maximalen Drehimpuls  $|\ell| = r^2 |d\varphi/d\tau| = \sqrt{3} cr_s$ . Die instabile Bahn bei  $r_<$  gibt es für  $\frac{3}{2}r_s \leq r \leq 3r_s$ , wobei die untere Grenze einem Drehimpuls  $|\ell| \rightarrow \infty$  entspricht. Für Radien  $r < \frac{3}{2}r_s$  gibt es keine Kreisbahnen (nicht einmal instabile).

Wir wollen als nächstes bestimmen, welche Geschwindigkeit  $v = r d\varphi/d\tau_s$  ein Körper besitzt, der ein Schwarzes Loch im Abstand  $r$  umkreist, gemessen mit Eigenzeit  $\tau_s$  eines stationären Beobachters im gleichen Abstand. Wir wissen, dass  $\ell/r = rd\varphi/d\tau$ . Damit müssen wir nur noch die Zeit auf die Eigenzeit  $\tau_s$  eines stationären Beobachters umrechnen. Wir haben  $d\tau/d\tau_s = \gamma^{-1}$ , mit  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  der Zeitdilatation

des bewegten Körpers bezüglich des stationären Beobachters. Somit ergibt sich die Gleichung  $v = \gamma^{-1}\ell/r$  mit der Lösung

$$v = \frac{c}{\sqrt{2(r/r_s - 1)}}, \quad (5.85)$$

wobei wir (5.84) benutzt haben. Beim kritischen Radius  $r = 3r_s$  für die stabile Kreisbewegung ist die Geschwindigkeit daher  $v = \frac{1}{2}c$  und beim Radius  $r = \frac{3}{2}r_s$ , unterhalb dessen es keine Kreisbewegung mehr gibt, gilt  $v = c$ . Die Kreisbewegung ist daher stabil für  $0 < v < \frac{1}{2}c$  und instabil bei  $\frac{1}{2}c < v < c$ . Da sich Licht immer mit Lichtgeschwindigkeiten ausbreiten, sind die kreisförmigen Nullgeodäten nur beim Radius  $r = \frac{3}{2}r_s$  vorhanden (dieses Resultat kann man direkt als Lösung der Nullgeodäten herleiten). Lichtteilchen sind daher auf dem Radius  $r = \frac{3}{2}r_s$  gebunden und man nennt diesen Radius daher auch *Photonen-Kugel*.

# Anhang A

## Tensoren

Wir betrachten einen reellen (endlichdimensionalen) Vektorraum  $V$ . Dann sind  $r$ -fach kovariante und  $s$ -fach kontravariante Tensoren multilineare Abbildungen

$$\mathbb{T} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s\text{-mal}} \mapsto \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

mit  $V^*$  dem Dualraum zu  $V$ , d. h.  $V^*$  ist der Vektorraum der linearen Abbildungen  $V \mapsto \mathbb{R}$ . Beachten Sie, dass der Raum der  $(r, s)$ -Tensoren  $\mathcal{T}_r^s(V)$  wiederum einen Vektorraum bildet. So gilt zum Beispiel

$$\mathcal{T}_0^0 = \mathbb{R}, \quad \mathcal{T}_1^0 = V^*, \quad \mathcal{T}_0^1 = V^{**} = V. \quad (\text{A.2})$$

Im Speziellen ist ein Skalarprodukt  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_2^0$ , d. h. zweifach kovariant.

Sei nun  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  eine Basis von  $V$  und  $\mathbf{e}^{*1}, \dots, \mathbf{e}^{*n}$  die dazugehörige duale Basis von  $V^*$  mit  $\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$ . Mit einer Basis können wir den Tensor  $\mathbb{T}$  durch seine Komponenten

$$T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \mathbb{T}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}, \mathbf{e}^{*j_1}, \dots, \mathbf{e}^{*j_s}) \quad (\text{A.3})$$

ausdrücken via

$$\mathbb{T} = T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \mathbf{e}^{*i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{*i_r} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_s}, \quad (\text{A.4})$$

wobei wir die einsteinsche Summenkonvention verwendet haben. Hier haben wir die Basis

$$\mathbf{e}^{*i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{*i_r} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_s}(\mathbf{e}_{l_1}, \dots, \mathbf{e}_{l_r}, \mathbf{e}^{*k_1}, \dots, \mathbf{e}^{*k_s}) = \delta^{i_1}_{l_1} \cdots \delta^{i_r}_{l_r} \delta^{j_1}_{k_1} \cdots \delta^{j_s}_{k_s}$$

der multilinearen Abbildung eingeführt, siehe (A.1).

Auf den Tensoren lassen sich folgende Operationen definieren:

**Addition und Multiplikation mit Skalar:** Mit  $S, T \in \mathcal{T}_r^s$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  ist auch  $aS + bT \in \mathcal{T}_r^s$  gegeben durch

$$(aS + bT)_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s} = aS_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s} + bT_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s};$$

d. h.  $\mathcal{T}_r^s$  ist ein Vektorraum.

**Tensorprodukt:** Mit  $S \in \mathcal{T}_{r_1}^{s_1}$  und  $T \in \mathcal{T}_{r_2}^{s_2}$  ist das Tensorprodukt  $S \otimes T \in \mathcal{T}_r^s$  definiert durch

$$(S \otimes T)_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s} = S_{i_1 \dots i_{r_1}}{}^{j_1 \dots j_{s_1}} T_{i_{r_1+1} \dots i_r}{}^{j_{r_1+1} \dots j_s},$$

wobei  $r = r_1 + r_2$  und  $s = s_1 + s_2$ .

**Verjüngung oder Kontraktion:** Aus einem Tensor  $T \in \mathcal{T}_r^s$  kann man durch Verjüngung (oder Kontraktion) einen Tensor  $S = K_k^l T \in \mathcal{T}_{r-1}^{s-1}$  erhalten. Mit  $1 \leq k \leq r$  und  $1 \leq l \leq s$  definieren wir

$$S_{i_1 \dots i_{r-1}}{}^{j_1 \dots j_{s-1}} = T_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_s}.$$

*Hinweis:* für  $T \in \mathcal{T}_1^1$  entspricht  $K_1^1$  gerade der Spurbildung,  $K_1^1 T = \text{tr } T$ .

## Skalarprodukt

In physikalischen Anwendungen haben wir meistens ein ausgezeichnetes Skalarprodukt  $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{T}_2^0$ . In Komponenten wird dieses durch die symmetrische Matrix  $g_{ij} = g_{ji}$  ausgedrückt. Dieses erlaubt es einem Indizes hoch- bzw. runterzuziehen. Im Besonderen ist das Skalarprodukt in Komponenten gegeben durch

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ij} v^i w^j = v_j w^j = v^i w_i \quad (\text{A.5})$$

mit der Operation des Herunterziehens  $v_j = g_{ji} v^i$  und  $w_j = g_{ji} w^i$ . Durch Invertieren dieser Beziehung erhalten wir  $v^i = g^{ij} v_j$  mit der Inversen  $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ , so dass  $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ .

## Euklidischer Raum

Der euklidische Raum  $\mathbb{R}^3$  mit kartesischer Basis ist definiert durch das Skalarprodukt  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . In diesem Raum wirkt das Hoch- bzw. Runterziehen trivial und daher werden die Indizes meistens nur unten geschrieben. Im Allgemeinen interessieren wir uns, wie Tensoren unter einem Basiswechsel transformiert werden. Wie schon in Kap. 1 gesehen, transformieren die Komponenten von Vektoren  $\mathbf{r} \in \mathcal{T}_0^1$  wie  $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ . Wegen des trivialen Skalarprodukts gibt es keinen Unterschied zwischen ko- und kontravarianter Transformation und wir erhalten, dass sich ein allgemeiner Tensor wie

$$T'_{i_1 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \quad (\text{A.6})$$

transformiert.

## Minkowski-Raum

Der Minkowski-Raum wird durch das Lorentz-Skalarprodukt  $g_{ij} = \eta_{ij}$  definiert mit

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

da  $\eta^{-1} = \eta$ .

Betrachten wir nun eine Basistransformation  $\Lambda$ , unter der die Komponenten eines Vierervektors  $x$  wie  $x' = \Lambda x$  transformieren.<sup>1</sup> Wir schreiben dies, unter Berücksichtigung der korrekten Hochstellung, als  $x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}$ . Durch das Herunterziehen der Indizes erhalten wir analog die Transformationsregel für einen kovarianten Vektor als  $x'_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x_{\mu}$  mit

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \eta_{\nu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\tau} \eta^{\tau\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Ein allgemeiner Tensor transformiert daher unter einer Basistransformation wie

$$T'_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s} = \Lambda_{i_1}{}^{\mu_1} \dots \Lambda_{i_r}{}^{\mu_r} \Lambda^{j_1}{}_{\nu_1} \dots \Lambda^{j_s}{}_{\nu_s} T_{\mu_1 \dots \mu_r}{}^{\nu_1 \dots \nu_s}. \quad (\text{A.9})$$

Tensoren, die so transformieren, werden auch Vierer- oder Lorentz-Tensoren genannt.

## Tensorfelder

Beachten Sie, dass auf Grund der festgelegten Transformationsregel (A.6) bzw. (A.9) Gleichungen zwischen Tensoren der gleichen Stufe automatisch kovariant sind. Diese schöne Eigenschaft lässt sich (punktweise) auf Tensorfelder  $T_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s}(t, \mathbf{r})$  verallgemeinern. Tensorfelder erlauben es zusätzlich, neben den obengenannten Operationen, Ableitungsoperationen zu definieren.

Im euklidischen Raum ist der Gradient  $S = \partial T$  von  $T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r})$  automatisch ein Tensor der Stufe  $n + 1$  definiert durch

$$S_{ki_1 \dots i_n} = (\partial T)_{ki_1 \dots i_n} = \frac{\partial}{\partial r_k} T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.10})$$

Mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial r'_k} = \frac{\partial r_l}{\partial r'_k} \frac{\partial}{\partial r_l} = \frac{\partial[(R^{-1})_{lm} r'_m + \text{const}]}{\partial r'_k} \frac{\partial}{\partial r_l} = (R^{-1})_{lk} \frac{\partial}{\partial r_l} = R_{kl} \frac{\partial}{\partial r_l}$$

ist es einfach zu sehen, dass  $S$  auch wirklich wie ein Tensor unter Koordinatenwechsel transformiert wird. In der Tat erhalten wir dann

$$\frac{\partial}{\partial r'_k} T'_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}') = R_{kl} R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial r_k} T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}).$$

<sup>1</sup>Den Vierervektor bezeichnen wir wie im Hauptteil nicht fett.

Im Minkowski-Raum kann man zeigen, dass der Gradient  $S = \partial T$  eines  $(r, s)$ -Tensors ein  $(r + 1, s)$ -Tensor ist. Analog zum euklidischen Fall erhält man mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial[(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\sigma} x'^{\sigma} + \text{const}]}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}.$$

Und daher transformiert  $S$  auch wirklich wie ein  $(r + 1, s)$ -Tensor mit dem Transformationsgesetz

$$\begin{aligned} S'_{\mu i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s}(x') &= \partial_{x'^{\mu}} T'_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s}(x') \\ &= \Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda_{i_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{i_r}^{\mu_r} \Lambda^{j_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{j_s}_{\nu_s} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} T_{\mu_1 \dots \mu_r}{}^{\nu_1 \dots \nu_s}(x) \\ &= \Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda_{i_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{i_r}^{\mu_r} \Lambda^{j_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{j_s}_{\nu_s} S_{\nu \mu_1 \dots \mu_r}{}^{\nu_1 \dots \nu_s}(x). \end{aligned}$$